

BACCALAURÉAT BLANC GÉNÉRAL

Lycée Louise Michel

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série Scientifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de Page 2 / 5 à Page 5 / 5.

Chaque exercice devra être réalisé sur une copie différente

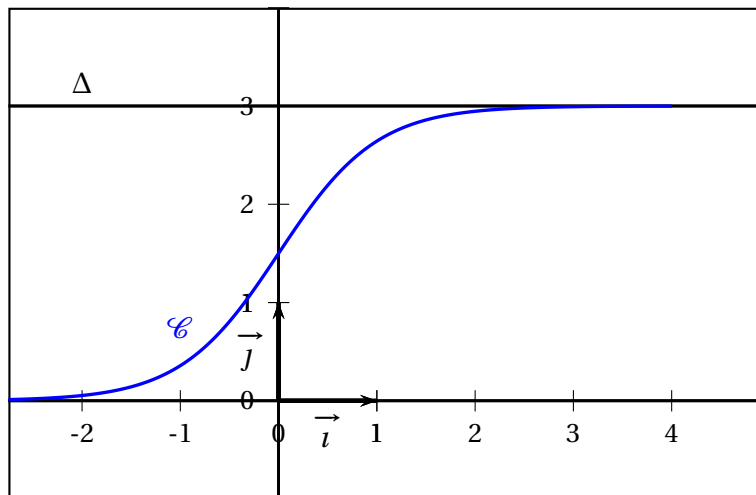
EXERCICE 1 5 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

- Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
- On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2} \ln(1 + e^{-2x})$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
- Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x) dx$.

b. Démontrer que $\int_0^a h(x) dx = \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2}{1 + e^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x & \geq 0 \\ f(x) & \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe 2. L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1.
 - a. Vérifier que $1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

- b. Pour quelles valeurs de n , les points O , A_0 et A_n sont-ils alignés?
3. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
 - a. Interpréter géométriquement d_n .
 - b. Calculer d_0 .
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n).$$

- d. En déduire que la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n ,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n , le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n .
 - c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe à rendre page 5. avec la copie.
 - d. Justifier cette construction.

EXERCICE 3 **4 points**

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

- La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

On sait que $P(X \leq 2) = 0,15$.

Déterminer la valeur exacte du réel λ .

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ .

- Déterminer $P(X \geq 3)$.
 - Montrer que pour tous réels positifs t et h , $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.
 - Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans?
 - Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
- L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 % et que le défaut sur un moteur est indépendant de celui des autres. On considère un échantillon de 800 moteurs prélevés au hasard. X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de moteurs défectueux.

Calculer la probabilité que plus de 8 moteurs soient défectueux.

EXERCICE 4 : non spécialiste **5 points**

Un volume constant de $2\,200 \text{ m}^3$ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient $1\,400 \text{ m}^3$ d'eau;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3 , contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

- Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit?
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Compléter les parties manquantes de l'algorithme suivant :

Initialisation	: $n \leftarrow 0$ $a \leftarrow 800$
Traitement	: Tant que $a < 1\,100$, faire : $a \leftarrow \dots$ $n \leftarrow \dots$ Fin Tant que

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1\,320$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Annexe exercice 2 :

NOM, Prénom :

