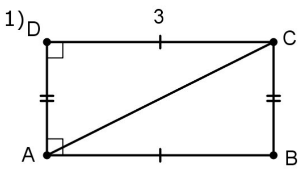
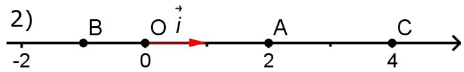
Exercices sur le produit scalaire

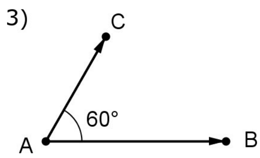
Exercice 1 :

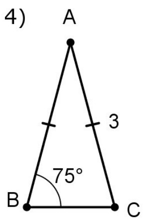
Sur les expressions du produit scalaire

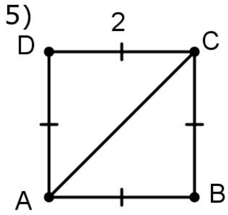
Pour les sept figures suivantes, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

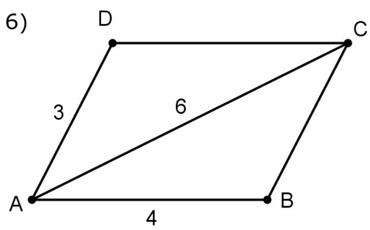


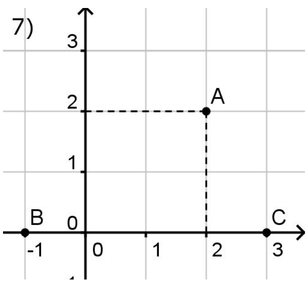












Exercice 2 :

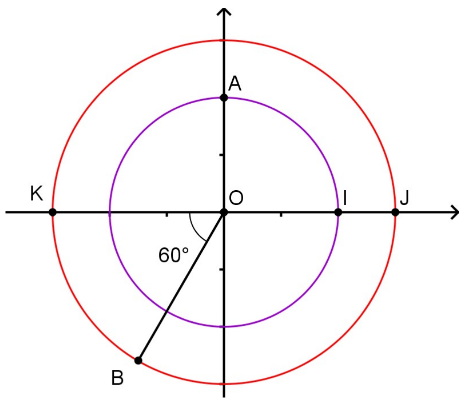
Sur les expressions du produit scalaire

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$



2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 3 :

Sur les expressions du produit scalaire

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du cacul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

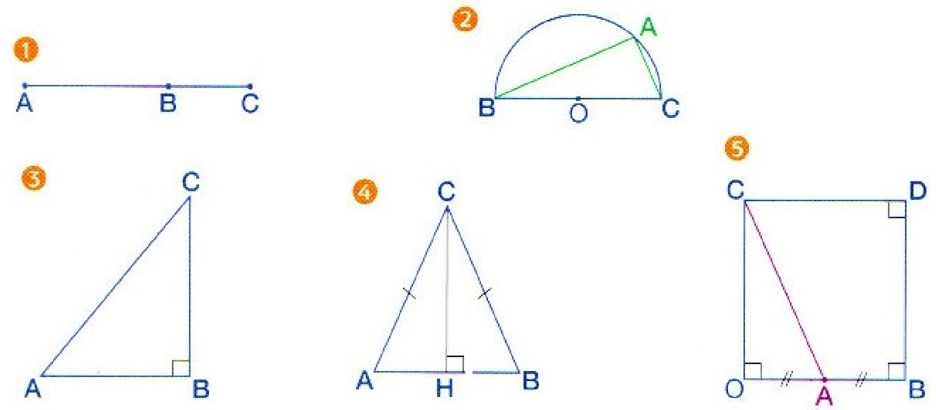
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AB^2$

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

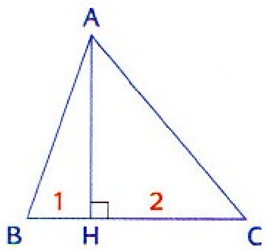


Exercice 4 :

Sur les expressions du produit scalaire

Quel théorème permet d'affirmer :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$



Exercice 5 :

Sur les expressions du produit scalaire

On donne trois points $A(4;1)$, $B(0;5)$ et $C(-2;-1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$.

Exercice 6 :

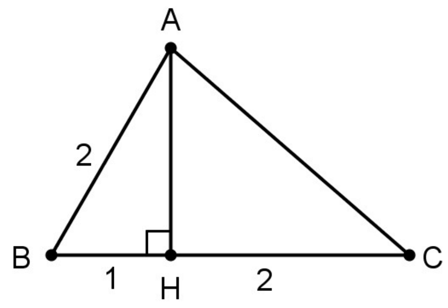
Règles de calcul

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

c) $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$



Exercice 7 :

Orthogonalité

Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

a) $\overrightarrow{u}\,(-5\,;\,2)$ et $\overrightarrow{v}\,(m\,;\,-2)$

b) $\overrightarrow{u}\,(m\,;\,3-m)$ et $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,-m)$

c) $\overrightarrow{u}\,(m-4\,;\,2m+1)$ et $\overrightarrow{v}\,(2m\,;\,3-m)$

Exercice 8 :

Orthogonalité

On donne $A(-4;1)$, $B(-1;2)$ et $C(1;-4)$.

1) Caculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 9 :

Distance

On donne les trois points $A(1;3)$, $B(-1;1)$ et $C(3;-2)$.

1) Caculer BC, puis $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

   a) Pourquoi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$?

   b) Pourquoi H est-il un point du segment $[BC]$?

   c) En déduire BH et HC.

Exercice 10 :

Distance

$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

$$AB=4 \quad , \quad AD=2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD}=60^\circ$$

1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$
2) En déduire les longueur AC et BD, et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

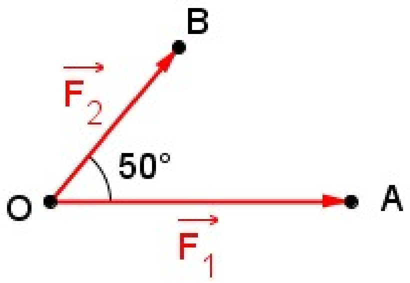
Exercice 11 :

Application en physique

Intensité de la résultante

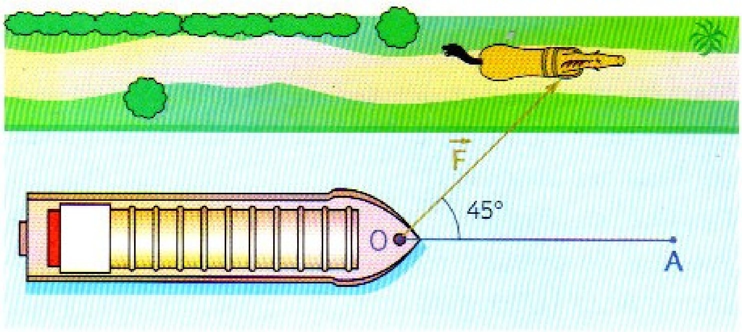
Soit un point O soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.



Travail d'une force

Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\overrightarrow{F}$ d'intensité de 2000 newtons selon une force de 45°avec la direction du déplacement.



1) Quel est le travail W de la force ?
2) Si la péniche est tirée par un bateau, suivant l'axe du déplacement, quelle est l'intensité de la force qu'il faut exercer pour obtenir le même travail ?

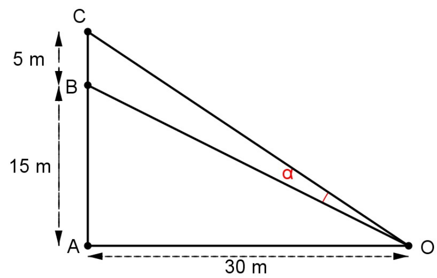
Exercice 12 :

Angle

1 A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2 Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle α.



Exercice 13 :

Ensemble de points

$ABCD$ est un carré de côté 2 et de centre O. On note I le milieu de $[AB]$.

1) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ est la droite (OI).
2) a) Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - 1$
   b) En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice 14 :

Ensemble de points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ et $\mathscr{L}_k$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1) Construire, si possible, $\mathscr{L}_k$ dans chacun des cas suivants :

   a) $k = -10$ b) $k = -5$ c) $k = 0$ d) $k = 7$

2) C est tel que ABC est un triangle équilatéral. Comment choisir k pour que C soint un point de $\mathscr{L}_k$?

Exercice 15 :

Ensemble de points

ABC est un triangle rectangle en A.

1) Démontrer qu'il existe un unique point M distinct de A tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ **et** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2) Quel point particulier obtient-on ?

Exercice 16 :

Ensemble de points

ABC est un triangle quelconque.

1) Construire sur la même figure :
   a) l'ensemble E_1 des points M tels que :
   $$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$
   b) l'ensemble E_2 des points M tels que :
   $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$$
2) Démontrer que E_1 et E_2 ont deux points communs si, et seulement si :
$$0 < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < AB^2$$

Exercice 17 :

Relations métriques dans un triangle

ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

1) $AB = 8$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

2) $AC = 6\sqrt{2}$, $\widehat{ACB} = 45°$ et $\widehat{BAC} = 105°$.

3) $AB = 48$, $AC = 43$ et $BC = 35$.

Exercice 18 :

Relations métriques dans un triangle

ABC est un triangle. Calculer les trois angles de ce triangle, dans chacun des cas suivants.

1) $BC = 32$, $AC = 28$ et $AB = 20$

2) $BC = 42$, $AC = 38$ et $AB = 32$

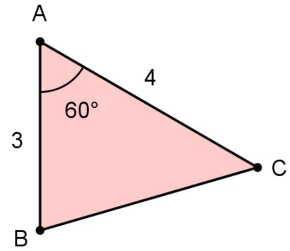
Exercice 19 :

Relations métriques dans un triangle

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) L'aire du triangle ABC.

2) Le périmètre du triangle ABC.



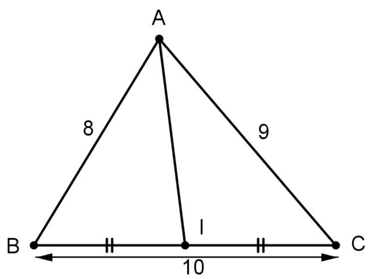
Exercice 20 :

Relations métriques dans un triangle

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) La longueur de la médiane AI.

2) La longueur des deux autres médianes.



Exercice 21 :

Relations métriques dans un triangle

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, $AB = 6$ et $\widehat{BAC} = 60°$

1) Calculer AC

2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

Exercice 22 :

Relations métriques dans un triangle

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$. l'unité est le cm.

1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

2) Trouver en cm^2, l'aire du triangle ABC.

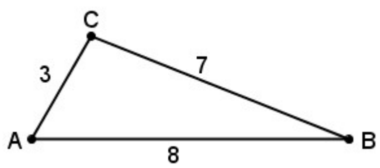
Exercice 23 :

Relations métriques dans un triangle

1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer $\cos \widehat{BAC}$

   b) En déduire $\sin \widehat{BAC}$

2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?



Exercice 24 :

Relations métriques dans un triangle

$ABCD$ est un parallélogramme tel que :

$$AB = 7 \quad AD = 3 \quad AC = 8$$

1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$

   b) En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos \widehat{BAD}$ et en déduire que :

$$\sin \widehat{BAD} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

2) a) Calculer l'aire du triangle BAD en précisant le théorème utilisé.

   b) En déduire l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 25 :

Droite et produit scalaire

d est la droite d'équation : $3x - y + 5 = 0$

1) Trouver un vecteur normal à d.

2) Trouver une équation de la droite Δ passant par $A(1; 2)$ et perpendiculaire à d.

Exercice 26 :

Droite et produit scalaire

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d et d' sont perpendiculaires.

a) $d : x - 2y + 4 = 0$ et $d' : 6x + 3y - 7 = 0$

b) $d : y =_2 x + 5$ et $d' : x - 2y + 1 = 0$

c) $d : (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$ et $d' : (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

Exercice 27 :

Trigonométrie

1) Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

2) Vérifier que : $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice 28 :

Trigonométrie

Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ c) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 29 :

Trigonométrie

1) Réduire les expressions suivantes :
   a) $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$
   b) $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
   c) $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$
2) Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

   a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
3) x est un réel de l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   a) Réduire l'écriture de l'expression :
   $$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$$
   b) En déduire que :
   $$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Exercice 30 :

Formules d'addition et de duplication

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin b = \frac{1}{2}$$

1) Calculer $\sin a$ et $\cos b$.
2) En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 31 :

Formules d'addition et de duplication

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\sin a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

1) Calculer $\cos a$ et vérifier que $\sin b = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
2) a) Calculer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.
   b) En déduire $(a + b)$ puis b.

Exercice 32 :

Formules d'addition et de duplication

a est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

1) Calculer $\cos 2a$
2) a) A quel intervalle appartient $2a$
   b) En déduire a, en justifiant votre réponse.

Exercice 33 :

Formules d'addition et de duplication

a est un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

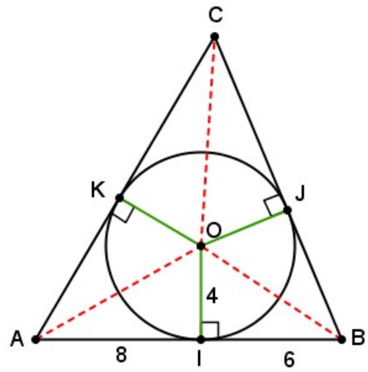
1) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$
   b) En déduire que : $\dfrac{1 + \sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
2) Sans calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

Exercice 34 :

Triangle et cercle inscrit

Comme l'indique la figure ci-contre, ABC est un triangle, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4 est le cercle inscrit tangent en I à (AB). On a $IA = 8$ et $IB = 6$.



1) a) Calculer : $\sin \dfrac{\widehat{A}}{2}$ et $\cos \dfrac{\widehat{A}}{2}$

b) Déduire que $\sin \widehat{A} = \dfrac{4}{5}$ et $\cos \widehat{A} = \dfrac{3}{5}$.

2) De même, calculer $\sin \widehat{B}$ et $\cos \widehat{B}$.

3) a) Démontrer que : $\cos \widehat{C} = \cos(\widehat{A} + \widehat{B})$ et $\sin \widehat{C} = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$

b) En déduire $\cos \widehat{C}$ et $\sin \widehat{C}$

c) En déduire les valeurs exactes de CA et CB.