

DM de Mathématiques 6

Exercice 1

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ et $D(7; -1; 4)$.

1/ Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2/ Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2; -1; 3)$.

(a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

(b) Que représente le vecteur $\vec{u}$ pour le plan (ABC)? En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

(c) Justifier qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

(d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3/ Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

(a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

(b) Vérifier que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation

paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

(c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

- 1/ (a) Étudier la limite de f en 0.
(b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
(c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
- 2/ (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

- (b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
- 3/ (a) Calculer les coordonnées exactes des éventuels points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.
(b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- 4/ Pour tout entier $n \geq 1$, on note $I_n = \int_{\frac{1}{e}}^n f(x) dx$.
 - (a) Donner une interprétation géométrique de I_n en justifiant soigneusement votre réponse.
 - (b) Démontrer que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - (c) Calculer I_n en fonction de n .
 - (d) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

★ ★
★