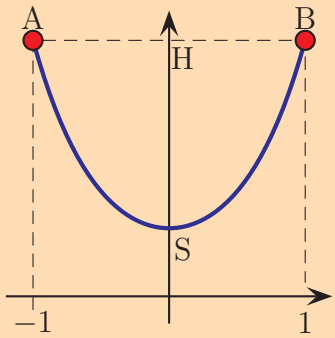
Devoir maison

I J'aime les intégrales et les exponentielles !

La chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène, flexible et inextensible, suspendu sous l'effet de son poids par ses deux extrémités à deux points fixes. On montre que, dans un repère orthonormale convenablement choisi, une chaînette est la courbe représentative d'une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{2\lambda} \quad \text{, avec } \lambda > 0$$



On prendra par la suite $\lambda = 2$.
On admet que la longueur de la chaînette (ou du fil suspendu) est donnée par

$$\mathrm{L} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

1 La flèche prise par le fil est la distance SH. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

2 En remarquant que l'expression $1 + (f'(x))^2$ est une identité remarquable, déterminer la longueur L du fil. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

II Donc, j'en reprends !

3 Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.

On rappelle que la fonction produit $w = u\,v$ est alors aussi dérivable sur I, avec :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad w'(x) = (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

En partant de $\displaystyle\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x$, démontrer la ***formule d'intégration par parties*** suivante :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$$

Dans la suite du problème, on pourra admettre cette formule pour s'en servir.

4 À l'aide de la formule d'***intégration par parties***, calculer les intégrales :

a. $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ **b.** $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ **c.** $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{\pi} ((2-2x)\sin(x))\,\mathrm{d}x$

5 Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Calculer I_n en fonction de n.