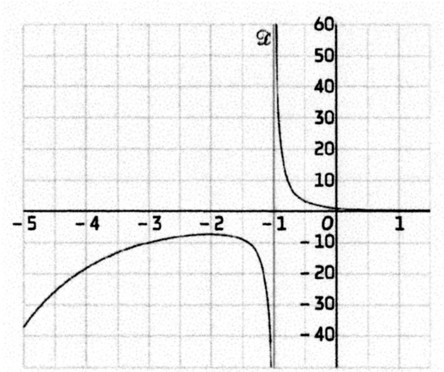
Limites de fonctions – Comportement asymptotique - Exercices

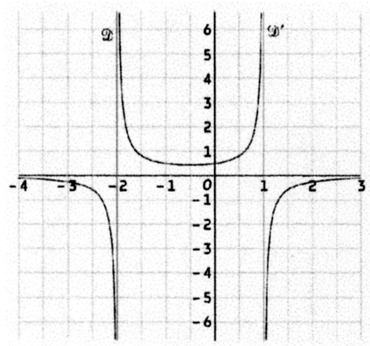
Notion de limite et asymptotes

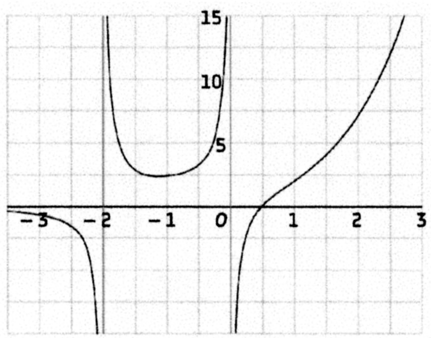
Exercice 1

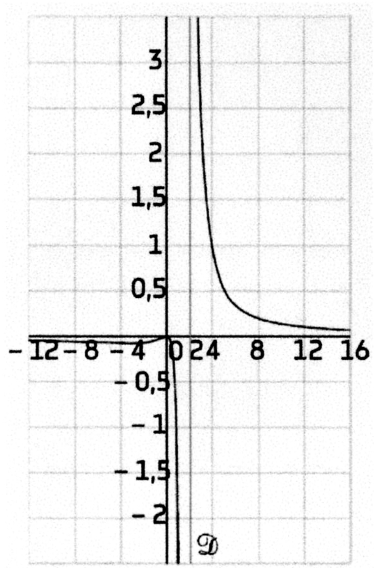
Dans chacun des cas suivants, on donne la représentation graphique d'une fonction *f* ainsi que les éventuelles asymptotes. En déduire :

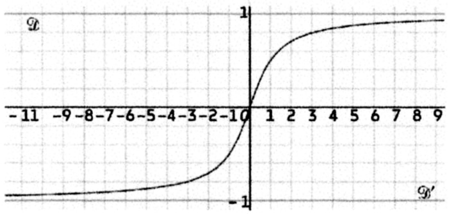
- le domaine de définition de *f*
- les limites aux bornes de l'ensemble de définition

1.


4.


2.


5.


3.


Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, on donne certaines limites d'une fonction *f*.
Donner une interprétation graphique de chacune de ces limites.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x<-4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-4\\x>-4}} f(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = -\infty$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 4$.

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(f\times g)(x)$$

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{3}{x}$
2. $f(x)=x^2$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{1}{x}$
3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$

Exercice 4

Etudier la limite à droite et à gauche de *a* pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{x^3}{1-2x}$; $\qquad$ $a=\dfrac{1}{2}$
2. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$; $\qquad$ $a=1$
3. $f(x)=\dfrac{4x-5}{1-x}$; $\qquad$ $a=1$

Exercice 5

Déterminer dans chaque cas la limite de f à l'endroit indiqué et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = x^3 - 5x^2\sqrt{x} - 2x^2 + 12$; en $+\infty$.

$f_2(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{3x^2 - 3x + 4}$; en $-\infty$.

$f_3(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x^2 + x - 2}$; en -2

$f_4(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 7x + 12}$; en 3

$f_5(x) = \dfrac{\sin(x+1)}{x^2 - 1}$; en -1

$f_6(x) = x^6 - 4x^2 + 3$; en $-\infty$.

$f_7(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x-3}\right) - \dfrac{1}{x^2 - 9}$; en 3.

$f_8(x) = \dfrac{3x^2 + 4\sin x^2}{5 - x^2}$; en $+\infty$.

$f_9(x) = (7x^2 + 4x - 32)^{21}$; en $-\infty$.

$f_{10}(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x^3}}{x}$; en 0.

Exercice 6

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{3x + 1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{3x^2 + 5}$
3. $f(x) = \dfrac{-4x + 1}{x^2 + 1}$
4. $f(x) = \dfrac{3x^4 + 1}{3x + 1}$

Exercice 7

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \dfrac{x - 4}{-x^2 + x + 2}$ en 2^+ et en $+\infty$.

$f_2(x) = \dfrac{3x - x^2}{|x - 3|}$ en $-\infty$ et en $+3$.

$f_3(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x} - 3x}{3x^2 - 3x + 4}$; en $+\infty$.

$f_4(x) = \left(7x^2 + 4x - \dfrac{32}{(x-1)^2}\right)^{21}$; en 1.

$f_5(x) = x^7 + 4x^2 + 3\pi$; en $-\infty$.

$f_6(x) = \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$; en 1

$f_7(x) = \dfrac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 - 2x - 3}$; en 3

$f_8(x) = \dfrac{\cos(x) + x}{x^3 + 2}$; en $-\infty$

Exercice 8

f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x - \sin x}{3x + 1}$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{2x-1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{3x+1}$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9

On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x}$

1. Prouver que pour tout réel $x \geq 0$: $4x^2 \leq 4x^2 + x + 1 \leq (2x+1)^2$

2. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $2 \leq f(x) \leq \dfrac{2x+1}{x}$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 10

On considère 3 fonctions f, g et h, définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si l'on sait que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors on peut en déduire :

Réponse A : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Réponse B : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Réponse C : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Exercice 11

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x + 1}$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement) :

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-5x+6}{(3-x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-\sqrt{2x^2+3}$

4. $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{4-x}$

Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{4;3\}$ par $g(x)=\dfrac{2x-6}{-x^2+7x-12}$. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et 4^+.

Exercice 13

On considère les fonctions de référence *u, v, w* et *r* définies par : $u(x)=ax+b$ (affine), $v(x)=x^2$ (carrée), $w(x)=\dfrac{1}{x}$ (inverse) et $r(x)=\sqrt{x}$ (racine carrée).

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions *u, v, w* et *r* :

$f(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}$, $g(x)=\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^2$, $h(x)=2\sqrt{x^2+1}+3$

Pour chacune de ces fonctions, on choisira les valeurs de *a* et de *b* qui conviennent.

Exercice 14

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

1°) Déterminer les domaines de définition de f et g.

2°) Peut-on calculer les limites de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers 1 ? Justifier.

3°) On pose $N(x)=x^3-3x+2$ et $D(x)=x^2-4x+3$

a) Calculer $N(1)$ et $D(1)$.

b) Montrer qu'il existe trois réels *a*, *b* et *c* tels que $N(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$.

c) Factoriser $N(x)$ puis $D(x)$.

4°) Simplifier l'expression de $f(x)$ pour $x\neq 1$ et en déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

5°) En utilisant la quantité conjuguée du numérateur, simplifier l'expression de $g(x)$ pour $x\neq 1$ et en déduire la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

Exercice 15

Soit h la fonction définie par : $h(x)=\dfrac{2x^2+3x}{x}$ et $k(x)=\dfrac{3x}{x^2+x}$

1°) Déterminer les domaines de définition de h et de k.

2°) Peut-on calculer les limites de $h(x)$ et $k(x)$ lorsque x tend vers 0 ? Justifier.

3°) Factoriser $h(x)$ et $k(x)$ pour $x\neq 0$ et en déduire les limites de $h(x)$ et $k(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 16

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

Vrai-Faux

Pour chacune des affirmation ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) Si pour tout $x>0$, on a $f(x)\leqslant \dfrac{2}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) Si pour tout $x>0$, on a $2+\dfrac{2}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

3) Si pour tout $x>0$, on a $1+\dfrac{3}{x}\leqslant f(x)\leqslant 2+\dfrac{3}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ avec $\ell\in[1;2]$.

4) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas la droite d'équation $y=a$.

Exercice 17

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-4}{-x^2+x+2}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{-x^2+x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-x^2}{|x-3|}$

4. $\lim\limits_{x\to+3} \dfrac{3x-x^2}{|x-3|}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-4}$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5+3x\sin x}{x^2+5}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{2x^2}$

Exercice 18

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\cos\left(\frac{\pi x+1}{x+2}\right)$; $D=\mathbb{R}_+$. En $+\infty$.

$f_2(x)=\dfrac{\sin 7x}{2x}$; $D=\mathbb{R}^\star$. En 0.

$f_3(x)=\dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$; $D=[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}]\setminus\{0\}$. En 0.

$f_4(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$; $D=\mathbb{R}_+\setminus\{9\}$. En 9.

$f_5(x)=x^3\sin\dfrac{1}{x^3}$; $D=\mathbb{R}^\star$. En 0.

Exercice 19

Déterminer les limites suivantes (On justifiera soigneusement)

$\ell im_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2}$ $\quad$ $\ell im_{x \to +\infty} 3x - \sqrt{2x^2+3}$ $\quad$ $\ell im_{x \to -\infty} 3x - \sqrt{2x^2+3}$

$\ell im_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-2}$ $\quad$ $\ell im_{n \to +\infty} \dfrac{\sin \frac{n}{2}}{n\sqrt{n}}$ $\quad$ $\ell im_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{2-x}$

Exercice 20

Soit la fonction f définie sur]-∞,0[par :

$$f(x) = x^3 - \cos x$$

1. Démontrer que l'on a pour tout x ≤0 :

$$f(x) \leq x^3 + 1$$

2. En déduire la limite de f en -∞.

Exercice 21

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5 - \dfrac{4}{x^2}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)^4$ c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 9 - \dfrac{16}{x^2+4}}$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. A quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$ conduit-elle ?

   b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}}$.

   c. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 23

Determiner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 12)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x + 3)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x+2}{3x-7}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - x + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 24

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminer a et b tels que $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
2. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.

Exercice 25

Vrai ou faux

a. Si pour tout réel x, $f(x) \geqslant x^2$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Si pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c. Si pour tout réel x strictement positif, $1 \leqslant f(x) \leqslant x$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

Exercice 26

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1}$

b. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x+1)$.

c. Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathcal{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x+1$? Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 27

Soit g la fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par l'expression $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.
3. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
5. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Problème de synthèse

Exercice 28

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x)=\dfrac{3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que C_f admet une asymptote verticale.

2°) Montrer qu'il existe trois réels a, b, et c tels que : $f(x)=a+\dfrac{bx+c}{(x+1)^2}$

3°) Démontrer que C_f admet une asymptote Δ vers $+\infty$ et vers $-\infty$ dont on déterminera la nature

4°) Déterminer la position relative de la courbe C_f par rapport à l'asymptote Δ .

Exercice 29

Déterminer les limites en -∞ et en +∞ des fonctions suivantes :

Soit f la fonction définie par $f(x)$ = . On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x $\in\mathbb{R}$-{3},

f(x) = ax + b +

3. Calculer *lim;\s\do8(x (–((f(x) – (2x + 3))* et *lim;\s\do8(x (+((f(x) – (2x + 3))*.
Donner une interprétation graphique du résultat.

4. On note Δ la droite d'équation $y = 2x + 3$.
Etudier la position relative de C et de Δ.

5. Déterminer $f(x)$ et $f(x)$.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 30

Soit $f(x)=\dfrac{2\sin x-3x}{x-2}$ définie sur D = $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

Exercice 33

Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+7\sqrt{x}+2}{-3+x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

Exercice 31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{4x^2+1}+2x$.
On se propose d'étudier le comportement de $f(x)-4x$ pour les grandes valeurs de x.

1. Le but de cette partie est d'observer et de conjecturer.
   a. Recopier et compléter à l'aide d'un tableur la feuille de calcul suivante :

	A	B	C
1	x	$f(x)$	$4x$
2	0	1	0
3	10	40,0249844	40
4	20		
5	30		
6	40		
7	50		
8	60		
8	70		
10	80		
11	90		
12	100		

   b. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, construire dans une même fenêtre la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=4x$.
   c. Commenter les résultats obtenus dans les deux questions précédentes. Conjecturer la limite en $+\infty$ de $f(x)-4x$.
2. Maintenant, on démontre.
   a. Démontrer que, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f(x)-4x=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$.
   b. En déduire que, pour tout réel $x>0$, $0<f(x)-4x<\dfrac{1}{2x}$.
   c. Déterminer la limite de $f(x)-4x$ en $+\infty$.

Dire qu'une droite D d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative d'une fonction f signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$

Exercice 32

Soient f et g les fonctions définies sur $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2}{x+1}$ et $g(x)=(x-2)^2$.

1. A l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
   Quelles remarques sur ces courbes peut-on faire pour des grandes valeurs de x ?
2. a. Démontrer que, sur $]-1\,;+\infty[$, $g(x)-f(x)=\dfrac{4}{x+1}$.
   b. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $]-1\,;+\infty[$.
   c. Calculer la limite de $g(x)-f(x)$ en $+\infty$.

Exercice 34

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$ par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer les limites de f en -2 et 0.
3. Interpréter graphiquement les résultats des deux questions précédentes.
4. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer dans un repère les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ et l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 35

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x - 1 - \dfrac{x}{x^2+1}$

2) a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2-\cos x} \leqslant 1$

   b) En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{2-\cos x}$

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \sqrt{x^2+1}$

Exercice 36

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-3}{x^2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 2$, on a $0 \leqslant f(x) - 2 \leqslant \dfrac{2}{x}$.
2. Déterminer un réel A tel que, si $x > A$, alors $0 \leqslant f(x) - 2 < 10^{-4}$.
3. Soit r un réel tel que $0 < r < 1$.
   Déterminer un réel A tel que, si $x > A$, alors $0 \leqslant f(x) - 2 < r$.
4. Quelle limite peut-on en déduire pour f ?
5. Interpréter graphiquement cette limite.

Exercice 41

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1.$$

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Exercice 37

f est une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que :

- pour tout $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$;
- pour tout $x \in]0;1]$, $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2}$.

1. Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$? Si oui, la donner en justifiant la réponse.
2. Peut-on donner la limite de f en 0 ? Si oui, la donner en justifiant la réponse.

Exercice 38

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+5}{4x+1}}$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+4} - x)$;
3. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x+2}$.

Exercice 39

Soit f la fonction $x \mapsto a + \dfrac{b}{x-c}$ où a, b et c sont des réels et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

1. Donner, en justifiant, les équations des asymptotes à la courbe repésentative de f.
2. (a) Quel réel peut-on déterminer sans calcul. Le donner en justifiant la réponse.
   (b) A partir de l'expression $f(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Quel deuxième réel cherché obtient-on ?
   (c) Déterminer le troisième réel cherché.

Exercice 40

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-4x-8}{x^2-2x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et donner les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.
2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
3. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 42

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-4}$.

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et donner les équations des asymptotes à la courbe représentative de f.

Exercice 43

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse (éventuellemnt par une définition ou un dessin) :

1. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe un réel m tel que si $x > m$, alors $f(x) > 10^4$.
2. Si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$, alors il existe un intervalle de la forme $]m; +\infty[$ tel que pour tout $x \in]m; +\infty[$, $f(x) < 0$.
4. Si $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$, alors la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 44

Le tableau ci-dessous décrit les variations d'une fonction f définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

1.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2

   (a) Préciser les limites de f aux bornes de son ensemble de définition puis donner les éventuelles équations des asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de f.

   (b) Construire une courbe correspondant au tableau.

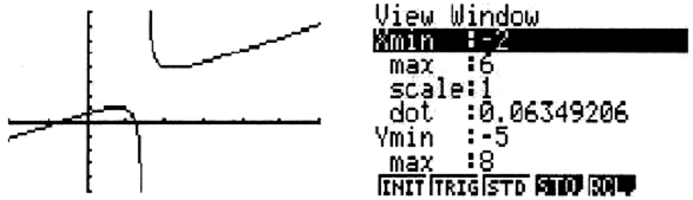
Exercice 45

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 2x^3\right)$.
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(1-\sqrt{x})\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)\right]$
   (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + x - x^3)$
   (d) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$
   (e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x-2}$.
2. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction f définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{9x+1}{x-3}}$.
3. Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2+3} - 2x$.

Exercice 46

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 2}{2x-3}$.

On a obtenu sur l'écran d'une calculatrice la représentation graphique suivante $\mathscr{C}_f$ de la fonction f (la fenêtre d'affichage est précisée à côté) :



1. Utiliser cette vue d'écran pour conjecturer :
   (a) les limites éventuelles de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en $\dfrac{3}{2}$;
   (b) une équation de l'asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.
2. Démontrer les conjectures.