

# Lois de probabilités à densité - Exercices

## EXERCICES - Densité sans intégrales, variable aléatoire

### Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction  $f$  est une densité pour une loi de probabilité sur  $I$  :

- |                         |              |                           |              |
|-------------------------|--------------|---------------------------|--------------|
| 1. $f(x) = 2 - x$       | $I = [0; 3]$ | 3. $f(t) = 3t^2$          | $I = [0; 1]$ |
| 2. $f(t) = \frac{1}{3}$ | $I = [2; 5]$ | 4. $f(t) = \frac{t^3}{4}$ | $I = [0; 1]$ |

### Exercice 2

Déterminer le réel  $k$  pour que la fonction  $f$  soit une densité de probabilité sur  $I$  et calculer  $P([3; 4])$  :

- |                |              |                               |              |
|----------------|--------------|-------------------------------|--------------|
| 1. $f(x) = k$  | $I = [1; 9]$ | 3. $f(t) = kt^2$              | $I = [0; 1]$ |
| 2. $f(t) = kt$ | $I = [1; 5]$ | 4. $f(x) = \frac{k}{5}(2x+1)$ | $I = [0; 5]$ |

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par :  $f(x) = 3x^2$

- Justifier que  $f$  est une densité de probabilité.
- $X$  est une variable aléatoire de loi de densité  $f$ .

Calculer les probabilités suivantes :

- (a)  $P(X \geq 0,5)$       (b)  $P(X < 0,1)$       (c)  $P(0,2 < X < 0,8)$

## EXERCICES - Densité avec intégrales, variable aléatoire

### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 3]$  par :  $f(t) = kt^3$

- Déterminer le réel  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité sur l'intervalle  $[0; 3]$ .
- On considère une variable aléatoire  $X$  suivant la loi de probabilité définie par la densité  $f$ .

- (a) Calculer  $P(1 \leq X \leq 2)$
- (b) Déterminer le réel  $a$  de  $[0; 3]$  tel que  $P(0 \leq X \leq a) = P(a \leq X \leq 3)$

### Exercice 5

On considère l'intervalle  $I = [1; 5]$  et la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(t) = \frac{k}{t^2}$ .

- Déterminer la valeur du réel  $k$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité sur  $I$ .
- Calculer  $P([1; 2])$  et  $P_{[2; 4]}([3; 5])$ .

### Exercice 6

On considère l'intervalle  $I = [1; 3]$  et la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(t) = \frac{9}{4}t^{-3}$ .

- Vérifier que  $f$  est une densité pour une loi de probabilité sur  $I$ .
- Une variable aléatoire  $X$  suit une loi de probabilité de densité  $f$ .  
Calculer  $P(X < 2)$ .

3. On définit l'espérance mathématique de  $X$  par  $E(X) = \int_1^3 t \cdot f(t) dt$

Déterminer l'espérance de  $X$ .

### Exercice 7

Reprendre l'exercice 10.6 avec  $I = [0; 3]$  et  $f(t) = \frac{1}{3}(t-2)^2$ .

### Exercice 8

$g$  est la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = 2xe^{-x^2}$

1. Pour tout nombre positif  $a$ , on pose  $I(a) = \int_0^a g(x) dx$ .

Calculer  $I(a)$  et en déduire  $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$ .

- Justifier que  $g$  est une densité de probabilité.
- $X$  est une variable aléatoire qui suit la loi de densité  $g$ .  
Déterminer le nombre  $m$  tel que  $P(X \leq m) = 0,5$ .

### Exercice 9

Reprendre l'exercice 10.5 avec  $I = [1; +\infty[$ .

## EXERCICES - Loi uniforme

### Exercice 10

On considère la loi uniforme sur l'intervalle  $[1 ; 5]$ .

1. Calculer  $P([1,2 ; 2,4])$  et  $P([3 ; 4,4])$ .
2. Justifier que si deux intervalles inclus dans  $[1 ; 5]$  ont même longueur, alors ils ont la même probabilité.
3. Calculer l'espérance de cette loi.

### Exercice 11

A partir de 7h00, les bus passent toutes les 15 minutes à un arrêt A.

Un usager se présente en A, entre 7h00 et 7h30. On fait l'hypothèse que la durée  $X$  (en min) entre 7h00 et l'heure de l'arrivée de cet usager en A est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle  $[0 ; 30]$ .

Quelle est la probabilité que cet usager attende le prochain bus :

- (a) moins de 5 minutes ?                      (b) plus de 12 minutes ?

### Exercice 12

$X$  est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[-2 ; 3]$  :

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité.
2. Calculer :  $P([1 ; 2])$ .
3. Déterminer  $P_{[1 ; 2,5]}([2 ; 3])$ .
4. Calculer l'espérance  $E(X)$ .

### Exercice 13

On choisit un nombre au hasard dans  $[-3 ; 7]$ .

$X$  est la variable aléatoire qui indique le nombre réel choisi.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :

- |                 |                                       |
|-----------------|---------------------------------------|
| (a) $X < 0$     | (d) $X < 0$ et $X > 1$                |
| (b) $ (X)  < 5$ | (e) $X \geq 0$ ou $X \leq -1$         |
| (c) $X = 4$     | (f) $X \geq 2$ sachant que $X \leq 5$ |

2. Déterminer l'espérance  $E(X)$ .

### Exercice 14

1. Etudier dans  $\mathbb{R}$  le signe de  $9x^2 - 33x + 10$ .

2. On choisit au hasard un réel dans l'intervalle  $[-1 ; 3]$ .

$X$  est la variable aléatoire qui indique le nombre réel choisi.

Quelle est la probabilité pour que  $X$  soit solution de l'inéquation

$$9x^2 - 33x + 10 > 0.$$

3. Déterminer la probabilité de l'évènement  $\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{1}{3}$ .

### Exercice 15

Une rame de métro relie deux stations M1 et M2 en 8 à 12 minutes.

On note  $X$  la durée du trajet lors d'une liaison et on suppose que  $X$  suit la loi uniforme sur  $[8 ; 12]$ .

1. Quelle est la densité de probabilité de la loi de  $X$  ?
2. Calculer la probabilité que la rame relie les deux stations en moins de 9min 30s ?
3. La rame quitte M1 à 8h00 et un usager arrive en M2 à 8h11.  
Cette rame reste en gare une minute.  
Quelle est la probabilité que l'usager soit obligé d'attendre la rame suivante ?

### Exercice 16

Dans un supermarché, le temps d'attente  $X$  à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[1 ; 11]$ .

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de la loi de  $X$ .
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

### Exercice 17

Depuis l'origine  $O$  du repère on lance un objet selon un

angle  $\theta$  compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4}$ .

L'objet lancé arrive en ligne droite sur l'arc de cercle  $KL$ .

La variable aléatoire  $\theta$  suit la loi uniforme dans l'intervalle

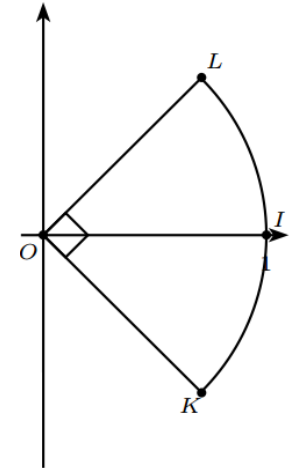
$$\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

1. Traduire chacun des événements suivants sous la forme «  $\theta$  appartient à l'intervalle ... » puis calculer leur probabilité.

- A : « L'objet arrive entre I et L ».
- B : « L'objet arrive en I ».
- C : « L'objet arrive en I à  $\frac{\pi}{12}$  près ».
- $D = A \cap C$

2. Calculer  $P_A(C)$ .

3. Soit  $a$  un nombre réel. Déterminer  $a$  de sorte que  $P(\theta \in [-a ; a]) = 0,5$ .



## EXERCICES - Loi exponentielle

### Exercice 18

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

- Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?
- Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée dépasse huit heures ?

### Exercice 19

#### Partie A - Restitution Organisée de Connaissances

On suppose connu le résultat suivant : « Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif  $\lambda$  alors, pour  $t$  réel positif :

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

- Démontrer l'égalité  $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ .
- En déduire pour  $s$  et  $t$  réels positifs, l'égalité suivante :  $P_{X>t}(X \geq s+t) = P(X \geq s)$ .

#### Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif  $\lambda$ .

- Déterminer une expression exacte de  $\lambda$  sachant que  $P(T \leq 10) = 0,7$ .  
On prendra pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de  $\lambda$ .
  - Donner une expression exacte de la probabilité  $P_{T>10}(T > 15)$ .
  - Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes. On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.
- On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement 6 caisses sont ouvertes. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.
  - Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $Y$ .
  - Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes. Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

### Exercice 20

#### Partie A - Restitution Organisée de Connaissances

- La fonction  $g$  est définie par  $g(t) = t \cdot f(t) = \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t}$  pour  $t \in [0; +\infty[$  et  $\lambda > 0$ .
  - Démontrer que l'on a  $g(t) = e^{-\lambda t} - (te^{-\lambda t})'$ .
  - Déterminer une primitive  $G(t)$ .
  - Calculer  $I = \int_0^x \lambda \cdot t \cdot e^{-\lambda t} dt$ .
  - En déduire  $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} I$ .

#### Partie B

La durée de vie, exprimée en heures, d'une ampoule électrique d'un certain modèle, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

- Sachant que  $P(X \leq 1000) = 0,229$ , déterminer la valeur exacte de  $\lambda$ .
- Sachant que l'événement  $(X > 1000)$  est réalisé, déterminer la probabilité de l'événement  $(X > 2500)$ .
  - Démontrer que, pour tous réels  $t \geq 0$  et  $h \geq 0$  :  
$$P_{X>t}(X \leq t+h) = P(X \leq h)$$
  - Sachant qu'une ampoule a fonctionné plus de 3000 heures, quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne avant 4000 heures ?

### Exercice 21

La durée de vie, exprimée en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Une étude statistique a permis d'estimer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

- Calculer la valeur de  $\lambda$  arrondie à trois décimales.
- Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :
  - moins de 8 ans ?
  - plus de 10 ans ?
  - Au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 3 ans ?

### Exercice 22

La variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Dans chacun des cas ci-dessous, calculer  $P(X \leq 0,5)$  et  $P(X > 10)$ .  
Quelle remarque peut-on formuler ?

- |                   |                             |                     |
|-------------------|-----------------------------|---------------------|
| (a) $\lambda = 2$ | (a) $\lambda = \frac{1}{2}$ | (c) $\lambda = 0,1$ |
|-------------------|-----------------------------|---------------------|

### Exercice 23

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs (chute de pierres, présence de troupeaux sur la route, verglas ...)

Un autocar part du dépôt. On note  $D$  la variable aléatoire qui mesure la distance en km que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que  $D$  suit la loi

exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{82}$ .

Les résultats demandés seront arrondis à  $10^{-3}$  près.

- Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
  - comprise entre 50 et 100 km
  - supérieure à 300 km
- Sachant que l'autocar a déjà parcouru 300 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
- Quelle est la distance moyenne  $d_m$  parcourue sans incident ? Justifier.
- L'entreprise possède 96 autocars. Les distances parcourues pour chacun d'eux sont des variables aléatoires de même loi exponentielle vue ci-dessus.

Les incidents qui peuvent survenir aux autocars sont indépendants les uns des autres. Pour tout  $d > 0$ ,  $X_d$  désigne la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru  $d$  kilomètres.

  - Quelle est la loi de la variable aléatoire  $X_{d_m}$  ?
  - Quel est à l'unité près, le nombre moyen d'autocar n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru  $d_m$  kilomètres ?

### Exercice 24

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques.

Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ». Soit  $X$  la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heures.

On admet que, pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

- On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.

Montrer qu'une valeur approchée de  $\lambda$  à  $10^{-3}$  près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on supposera que l'on a  $\lambda = 0,131$  ; les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.

- Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.
- Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

- Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre 6 et 10 heures.
- On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement que l'on suppose indépendants. Soit  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
  - Quelle est la loi suivie par  $Y$  ?
  - Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
  - Calculer l'espérance mathématique de  $Y$  (on arrondira à l'entier le plus proche).

### Exercice 25

La durée de vie en heures, des ampoules fluo compactes est une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle d'espérance 1000.

- Donner la fonction densité de probabilité de cette variable aléatoire  $T$ .
- Calculer  $P(T \leq 8000) = 0,7$ . Que signifie ce calcul ?
- Sachant qu'une ampoule a déjà fonctionné pendant 7000 h, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 12 000 h ?

### Exercice 26

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire  $Y$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout réel positif  $t$ ,  $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

Dans les questions 1, 2 et 3 les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$  près.

- Exprimer  $P(Y \leq 1)$  en fonction de  $\lambda$ . En déduire la valeur de  $\lambda$ , sachant que l'on  $P(Y \leq 1) = 0,8$
- Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
- Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
- On rappelle que  $E(Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$  où  $F$  est la fonction définie sur l'intervalle

$$[0; +\infty[ \text{ par } F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

- Montrer que  $G(x) = -\left(\frac{1}{\lambda} + x\right)e^{-\lambda x}$  est une primitive de  $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ .

En déduire  $F(t)$ .

- Calculer  $E(Y)$ , puis interpréter le résultat. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près.

# DEVOIRS – BACCALAUREAT

## Exercice 1 – Baccalauréat Asie Juin 2018

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.

Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message pré-enregistré.

Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0,02 \text{ s}^{-1}$ .

Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.

Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire  $Y$ , exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 96 \text{ s}$  et d'écart-type  $\sigma = 26 \text{ s}$ .

1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
  - a. Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
  - b. Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.

Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?