

## Fichier extrait du document

### [2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)

#### Informations générales

Type : [Concours Blanc](#)  
Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)  
Matières : [Mathématiques](#)  
Mots clés : intégrale impropre, lois discrètes,  
application linéaire

#### Les fichiers du [document 1707](#)

- 2020-2021 DS10 - Concours Blanc 02 #1707

Le contributeur **pinel** précise : Deux extraits d'Ecricome E 2021

## Derniers docs de CPGE ECS 1

- [C Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [C 2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- [? Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [C 2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- [? Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- [? ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1707



[revisermonconcours.fr](http://revisermonconcours.fr)

## CONCOURS BLANC 02 – ECS1

**Durée : 4h**

Calculatrice interdite.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**EXERCICE 01**

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt$$

**Partie A.**

Dans cette partie, on fixe un entier  $n \geq 2$ .

**1a.** Déterminer une primitive sur  $]0; 1]$  de  $t \rightarrow \ln t$ . On pourra utiliser une intégration par parties.

**1b.** Donner un équivalent au voisinage de  $0^+$  de la fonction  $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^n}$ .

**1c.** Démontrer que l'intégrale impropre  $J_n$  converge.

**2.** Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $K_n$ .

**3.** Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $I_n$ .

**Partie B.**

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**4a.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on a :

$$\forall t \in ]0,1], \quad 0 \leq \frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \leq -t^n \ln t$$

**4b.** A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  l'intégrale  $\int_0^1 -t^n \ln t \, dt$  converge et déterminer sa valeur.

**4c.** En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .

**5a.** Prouver que pour tout réel  $x \geq 1$  et tout entier naturel  $n \geq 3$  on a

$$\frac{\ln x}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$$

**5b.** En déduire un encadrement de l'intégrale  $K_n$ .

**5c.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

**EXERCICE 02**

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $f$  l'application qui à un polynôme  $P$  de  $E$  associe le polynôme défini pour tout réel  $x$  par

$$f(P)(x) = P(x+1) + P(x).$$

On désigne par  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ , les polynômes étant rangés dans l'ordre croissant des degrés.

**1.** Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

**2a.** Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .

**2b.**  $f$  est-il un isomorphisme ?

**3.** Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

**4.** Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $f^{-1}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

**5.** Soit  $P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$  un polynôme de  $E$ .

**5a.** Expliciter le polynôme  $Q = f^{-1}(P)$  en fonction des coefficients de  $P$ .

**5b.** On considère pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, la somme  $S(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^k P(k)$ .

Exprimer  $S(n)$  sous forme simplifiée, en fonction de  $Q$ , sans symbole somme.

## PROBLEME

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On note alors  $X$  la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs.

Si on n'obtient jamais deux « Pile », on note  $X = -1$ .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Face, Face, ... alors  $X = 5$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose les événements suivants :

- $F_n$  « obtenir Face au lancer  $n$  »
- $P_n$  « obtenir Pile au lancer  $n$  »

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose les événements suivants :

- $U_n$  « au cours des  $n$  premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$

Enfin, pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose :

- $u_n = P(U_n)$
- $a_n = P(X = n)$

### Partie A.

1. Exprimer les événements  $(X = 2)$ ,  $(X = 3)$  et  $(X = 4)$  à l'aide de certains événements  $P_k$  et  $F_k$ .

En déduire  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ .

2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

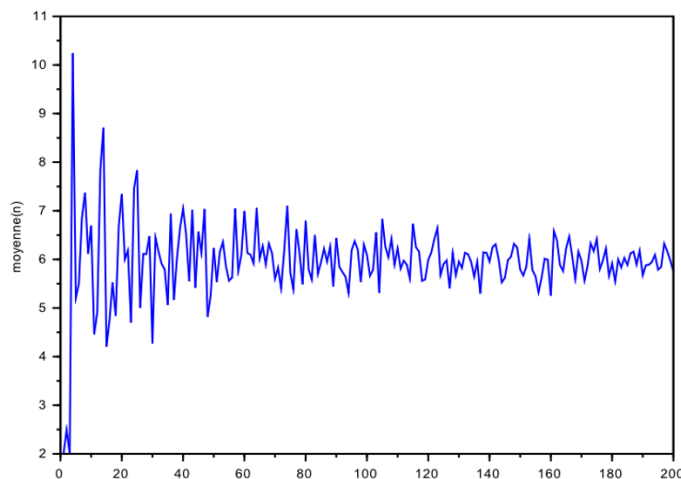
$$u_n = \sum_{k=2}^n a_k .$$

3a. Recopier et compléter la fonction SciLab ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```
function y=simulX()
    tirs=0
    pile=0
    while pile .....
        if rand()<1/2 then pile=pile+1
        else
            pile=.....
        end
        tirs=.....
    end
    y=tirs
endfunction
```

3b. Ecrire une fonction SciLab d'en-tête *function s = moyenne(n)* qui simule  $n$  fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

3b. On calcule *moyenne(n)* pour chaque entier  $n$  de  $\llbracket 1; 200 \rrbracket$  et on trace les résultats obtenus dans le graphique suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire  $X$  ?

**Partie B.****4a.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$$

**4b.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ ,

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

**4c.** En déduire que pour tout entier  $n \geq 4$ ,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

**5.** Etudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \geq 4}$  et en déduire la limite de la suite.**6.** En déduire que l'évènement  $(X = -1)$  est négligeable.**Partie C – étude de l'espérance de  $X$ .**Dans cette partie, on pose pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$v_n = 1 - u_n \text{ et } S_n = \sum_{k=2}^n kP(X = k)$$

**7.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ ,

$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$$

**8.** Justifier que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}$$

**9.** Démontrer alors par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$$

**10.** En déduire que la suite est croissante et majorée.**11.** Montrer que  $X$  admet une espérance.**12a.** Démontrer que la suite  $(nv_n)_{n \geq 2}$  converge vers un réel  $\lambda$ .**12b.** Montrer que si  $\lambda \neq 0$  alors la série de terme général  $v_n$  est divergente.En déduire à l'aide de Q7 que  $\lambda = 0$ .**12c.** Déterminer alors  $E(X)$ .

# ÉLÉMENTS DE CORRECTION

## EXERCICE 01 – ECRICOME 2021 E

Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt$$

### Partie A.

Dans cette partie, on fixe un entier  $n \geq 2$ .

**1a.** Déterminer une primitive sur  $]0; 1]$  de  $t \rightarrow \ln t$ . On pourra utiliser une intégration par parties.

Inutile d'IPP pour ceux qui connaissent leur cours ! Une primitive de  $f(t) = \ln t$  est donnée par  $F(t) = t \ln t - t$ .

**1b.** Donner un équivalent au voisinage de  $0^+$  de la fonction  $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^n}$ .

Pour  $n \geq 2$ , au voisinage de 0,  $1+t^n \sim 1$  donc par quotient, au voisinage de 0 :

$$\frac{\ln t}{1+t^n} \sim \ln t$$

**1c.** Démontrer que l'intégrale impropre  $J_n$  converge.  $J_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt$  est une intégrale impropre en 0.

- Soit  $\epsilon > 0$  :  $\int_\epsilon^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_\epsilon^1 = -\epsilon \ln \epsilon + \epsilon - 1 \rightarrow -1$  par croissances comparées quand  $\epsilon \rightarrow 0$  : par conséquent,  $\int_0^1 \ln t dt$  est une intégrale impropre convergente (et elle converge vers  $-1$ ).
- Par ailleurs,  $\frac{\ln t}{1+t^n} \sim \ln t$  d'après le 1b et ces fonctions étant de signe constant au voisinage de 0 (elles sont négatives), le critère d'équivalence sur les intégrales impropres de fonctions de signe constant nous permet de dire que  $J_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} dt$  converge.

**2.** Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $K_n$ .  $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt$  est une intégrale impropre en  $+\infty$ .

- Pour  $n \geq 2$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{1.5} \times \frac{\ln t}{1+t^n} = 0$  : en effet,  $\frac{\ln t}{1+t^n} \sim \frac{\ln t}{t^n}$  et donc  $t^{1.5} \times \frac{\ln t}{1+t^n} \sim \frac{\ln t}{t^{n-1.5}}$  en  $+\infty$ .  
On obtient alors le résultat par croissances comparées puisque  $n - 1.5 > 0$
- Par conséquent, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{\ln t}{1+t^n} = o\left(\frac{1}{t^{1.5}}\right)$ .
- Or  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1.5}} dt$  est une intégrale de Riemann convergente.
- Comme pour  $t \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{\ln t}{1+t^n}$ , le critère de négligeabilité sur les intégrales impropres de fonctions positives permet d'affirmer que l'intégrale  $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt$  converge.

**3.** Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $I_n$ .

Q1c et Q2 permettent d'affirmer que l'intégrale impropre  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} dt$  converge et que  $I_n = J_n + K_n$ .

**Partie B.** Dans cette partie, on s'intéresse à la limite de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**4a.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  on a :  $\forall t \in ]0, 1], 0 \leq \frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \leq -t^n \ln t$

- Notons déjà que

$$\frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t = \ln t \left( \frac{1}{1+t^n} - 1 \right) = -\frac{t^n \ln t}{1+t^n}$$

- Ainsi, pour tout  $t \in ]0, 1]$ , comme  $\ln t < 0$  on a bien  $\frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \geq 0$
- Comme  $t > 0$ ,  $1+t^n \geq 1$  et donc  $\frac{1}{1+t^n} \leq 1$  càd  $\frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$ . On multiplie par  $-\ln t > 0$ , il vient

$$\frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t = -\frac{t^n \ln t}{1+t^n} \leq -t^n \ln t$$

**4b.** A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  l'intégrale  $\int_0^1 -t^n \ln t \, dt$  converge et déterminer sa valeur. Cette intégrale est impropre en 0.

- Posons  $\epsilon > 0$ . Soient  $\begin{cases} u = \ln t \\ v' = -t^n \end{cases} \begin{cases} u' = \frac{1}{t} \\ v = -\frac{t^{n+1}}{n+1} \end{cases}$  :  $u$  et  $v$  sont  $C^1([\epsilon; 1])$  donc on a

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^1 -t^n \ln t \, dt &= - \left[ \ln t \times \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{\epsilon}^1 + \frac{1}{n+1} \int_{\epsilon}^1 t^n \, dt \\ &= \ln \epsilon \times \frac{\epsilon^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{\epsilon}^1 = \ln \epsilon \times \frac{\epsilon^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{\epsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

- Par croissances comparées, on obtient alors que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 -t^n \ln t \, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

- Ainsi, l'intégrale  $\int_0^1 -t^n \ln t \, dt$  converge et  $\int_0^1 -t^n \ln t \, dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ .

**4c.** En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .

Rappelons que  $J_n = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} \, dt$  et que  $\forall t \in ]0,1], 0 \leq \frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \leq -t^n \ln t$  (Q4a).

Par croissance de l'intégrale ( $0 < 1$ ), et comme les intégrales en jeu convergent,

$$0 \leq \int_0^1 \left( \frac{\ln t}{1+t^n} - \ln t \right) dt \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{d'après Q4b}$$

Par linéarité d'intégrales convergentes,

$$0 \leq J_n - \int_0^1 \ln t \, dt \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

D'après le théorème des gendarmes on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^1 \ln t \, dt \quad (= -1 \text{ d'après Q1c})$$

**5a.** Prouver que pour tout réel  $x \geq 1$  et tout entier naturel  $n \geq 3$  on a  $\frac{\ln x}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^{n-1}}$ .

- Pour  $x \geq 1$ , nous savons que  $0 \leq \ln x \leq x$  (faire une étude de fonctions par exemple) et que  $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{x^n}$
- Par multiplication de ces deux inégalités rangées dans le même sens et positives, on obtient alors

$$\frac{\ln x}{1+x^n} \leq \frac{x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}}$$

**5b.** En déduire un encadrement de l'intégrale  $K_n$ . Rappelons que  $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^n} \, dt$

Nous savons donc que  $\forall t \geq 1$ ,

$$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^n} \leq \frac{1}{t^{n-1}}$$

Par croissance de l'intégrale (les intégrales en jeu convergent puisque  $n-1 \geq 2$ ),

$$0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \, dt = \frac{1}{n-2}$$

**5c.** Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

- Par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$
- Puisque  $I_n = J_n + K_n$ , d'après le 4c,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -1$$

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  et  $f$  l'application qui à un polynôme  $P$  de  $E$  associe le polynôme défini pour tout réel  $x$  par  $f(P)(x) = P(x+1) + P(x)$ .

On désigne par  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ , les polynômes étant rangés dans l'ordre croissant des degrés.

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

- Soit  $P \in E : f(P) = P(X+1) + P(X)$  et comme  $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$ , on obtient que  $\deg(f(P)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P)) \leq 3$

Ainsi  $f(E) \subset E$ .

#### Remarque 1 sur $P(X+1)$

Il s'agit d'une composition pas d'une multiplication de polynômes.

Par exemple, si  $P(X) = X^2 + 1$  alors  $P(X+1) = (X+1)^2 + 1 = X^2 + 2X + 2$

#### Remarque 2 sur $\deg(P(X+1))$

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

- Soit  $(P, Q) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) = f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

$f$  est bien linéaire.

2a. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .

Nous savons que l'image d'une base de  $E$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ .

On a :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$$

Or

- $f(1) = 1(X+1) + 1(X) = 1 + 1 = 2$  (il s'agit d'une évaluation, pas d'un produit).
- $f(X) = X + 1 + X = 2X + 1$
- $f(X^2) = (X+1)^2 + X^2 = 2X^2 + 2X + 1$
- $f(X^3) = (X+1)^3 + X^3 = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$

Donc

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(2, 2X + 1, 2X^2 + 2X + 1, 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$$

Ces polynômes étant à degré échelonné, ils forment une famille libre de  $\text{Im}(f)$  donc ils constituent une base de  $\text{Im}(f)$ .

2b.  $f$  est-il un isomorphisme ? Oui, puisque  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f) = 4$  et donc  $\text{Im}(f) = E : f$  est donc surjectif. Comme c'est un endomorphisme, il est aussi injectif (et donc bijectif).

3. Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On déduit du 2a que  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Remarque : la matrice  $M$  est triangulaire sans 0 sur la diagonale, elle est donc inversible. Par conséquent,  $f$  est bijectif bien bijectif (Q2b).

5. Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $f^{-1}$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . D'après le cours, la matrice de  $f^{-1}$  est l'inverse  $M^{-1}$  de la matrice  $M$  de  $f$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 - L4/2 \\ L2 - 3L4/2 \\ L3 - 3L4/2 \\ L4/2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 - L3/2 \\ L2 - L3 \\ L3/2 \end{matrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L1 - L2/2 \\ L2/2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. Soit  $P = \sum_{k=0}^3 a_k X^k$  un polynôme de  $E$ .

6a. Expliciter le polynôme  $Q = f^{-1}(P)$  en fonction des coefficients de  $P$ . Vectoriellement,  $[P] = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  : ainsi,

$$[Q] = M^{-1}[P] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4a_0 - 2a_1 + a_3 \\ 4a_1 - 4a_2 \\ 4a_2 - 6a_3 \\ 4a_3 \end{pmatrix} \text{ et donc } Q = \frac{1}{8}(4a_0 - 2a_1 + a_3 + (4a_1 - 4a_2)X + (4a_2 - 6a_3)X^2 + 4a_3X^3).$$

6b. On considère pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, la somme  $S(n) = \sum_{k=1}^n (-1)^k P(k)$ .

Exprimer  $S(n)$  sous forme simplifiée, en fonction de  $Q$ , sans symbole somme. On a

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k f(Q)(k) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (Q(k+1) + Q(k)) = \sum_{k=1}^n (-1)^k Q(k+1) + \sum_{k=1}^n (-1)^k Q(k) \\ &= - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k Q(k) + \sum_{k=1}^n (-1)^k Q(k) = (-1)^n Q(n+1) - Q(1)
\end{aligned}$$

## PROBLEME – ECRICOME 2021 E

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs.

On note alors  $X$  la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs.

Si on n'obtient jamais deux « Pile », on note  $X = -1$ .

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Face, Face, ... alors  $X = 5$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose les événements suivants :

- $F_n$  « obtenir Face au lancer  $n$  »
- $P_n$  « obtenir Pile au lancer  $n$  »

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose les événements suivants :

- $U_n$  « au cours des  $n$  premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$

Enfin, pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose :

- $u_n = P(U_n)$
- $a_n = P(X = n)$

### Partie A.

1. Exprimer les événements  $(X = 2)$ ,  $(X = 3)$  et  $(X = 4)$  à l'aide de certains événements  $P_k$  et  $F_k$ .

En déduire  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ .

Notons que la famille d'événements  $(P_k)_k$  est une famille d'événements mutuellement indépendants.



- $(X = 2) = P_1 \cap P_2$  donc par indépendance  $a_2 = P(P_1) \times P(P_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
- $(X = 3) = F_1 \cap P_2 \cap P_3$  donc par indépendance  $a_3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
- $(X = 4) = (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$  donc par indépendance et incompatibilité des événements  $(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$  et  $(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$ , on trouve  $a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $u_n = \sum_{k=2}^n a_k$ . Pour réaliser  $U_n$ , il faut, au cours des  $n$  premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles.

Cela peut arriver au lancer 2, au lancer 3, ... au lancer  $n$  : ainsi,

$$U_n = (X = 2) \cup (X = 3) \cup \dots \cup (X = n).$$

Ces événements étant deux à deux incompatibles (le 1<sup>er</sup> double-pile ne peut arriver en même temps au lancer 2 et au lancer 4 par exemple),

$$u_n = P(U_n) = \sum_{k=2}^n P(X = k) = \sum_{k=2}^n a_k$$

3a. Recopier et compléter la fonction SciLab ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs, et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

En étudiant le programme à trous, on constate que la variable `tirs` compte le nombre de lancers, c'est donc la valeur que renvoie notre fonction. La variable `pile` est le nombre de Pile consécutifs, on veut atteindre 2. Si on a un Face, cette variable est remise à zéro.

```

1  function y = simulX()
2      tirs = 0
3      pile = 0
4      while pile < 2
5          if rand() < 1/2 then
6              pile = pile + 1
7          else
8              pile = 0
9          end
10         tirs = tirs + 1
11     end
12     y = tirs
13 endfunction

```

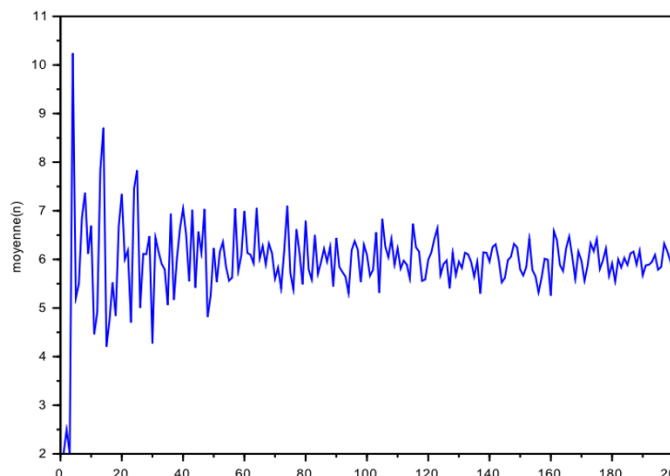
3b. Ecrire une fonction SciLab d'en-tête `function s = moyenne(n)` qui simule  $n$  fois l'expérience ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

```

1  function s = moyenne(n)
2      s = 0
3      for i = 1:n
4          s = s + simulX()
5      end
6      s = s / n
7  endfunction

```

3b. On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier  $n$  de  $\llbracket 1; 200 \rrbracket$  et on trace les résultats obtenus dans le graphique suivant.



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire  $X$  ?

On peut conjecturer que plus  $n$  est grand, plus la valeur renvoyée par `moyenne(n)` sera proche de  $E(X)$  (loi faible des grands nombres).

On lit une oscillation de plus en plus proche de 6. On conjecture donc que  $X$  admet une espérance et que  $E(X)=6$ .

En moyenne il faudra 6 lancers pour obtenir le premier double pile.

## Partie B.

**4a.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$ .

L'évènement  $U_{n+1}$  signifie qu'on a obtenu 2 *Pile* consécutifs à un moment au cours des  $n+1$  premiers lancers. On a pu l'obtenir au cours des  $n$  premiers lancers (ce qui correspond à  $U_n$ ) ou grâce à l'ajout du  $(n+1)$ -ième lancer, c'est à dire avec les deux derniers lancers  $P_n \cap P_{n+1} = B_{n+1}$ .

En d'autres termes,

$$U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}.$$

Par la formule du crible,

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$

**4b.** Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$

L'évènement  $B_{n+1}$  nous donne une information très précise (*Pile* et *Pile*) sur ce qui s'est passé lors des lancers numérotés  $n$  et  $n+1$ . Comme  $U_n$  concerne ce qui a pu se passer lors des  $n$  premiers lancers, on a naturellement l'idée de différencier selon ce qu'on a obtenu au lancer  $n-1$  : *Pile* ou *Face*. En observant que  $(F_{n-1}, P_{n-1})$  est un s.c.e, on a

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1}) \cup (U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1}).$$

On voit alors

- D'une part,  $B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}$  et comme  $P_n \cap P_{n-1} \subset U_n$  (si on a *Pile* aux lancers  $n-1$  et  $n$ , on a bien eu deux *Pile* consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers), on a

$$U_n \cap B_{n+1} \cap P_{n-1} = P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}.$$

- D'autre part, ayant obtenu *Face* au lancer  $n-1$ , on ne peut avoir eu deux *Pile* consécutifs qu'au cours des  $n-2$  premiers lancers, et donc

$$U_n \cap B_{n+1} \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Au final, on a bien,

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1}).$$

**4c.** En déduire que pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ .

Par incompatibilité des évts précédents,

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + P(P_{n+1} \cap P_n \cap P_{n-1})$$

Par indépendance des évts en jeu,

$$\begin{aligned} P(U_n \cap B_{n+1}) &= P(U_{n-2})P(F_{n-1})P(P_n)P(P_{n+1}) + P(P_{n+1})P(P_n)P(P_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Or d'après le 4a,

$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = u_n + \frac{1}{4} - \left( \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8} \right)$$

Et donc  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ .

5. Etudier les variations de la suite  $(u_n)_{n \geq 4}$  et en déduire la limite de la suite.

- D'après la question précédente,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \geq 0$  puisque  $u_{n-2} \in [0; 1]$  (c'est une probabilité). La suite  $(u_n)$  est donc croissante.
- Par ailleurs est majorée par 1 (c'est encore une probabilité) donc, d'après le théorème de convergence monotone elle converge vers une limite  $L \in [0; 1]$ .
- Par passage à la limite dans la relation 4c, on obtient :

$$L = L + \frac{1}{8}(1 - L) \text{ ssi } L = 1$$

6. En déduire que l'évènement  $(X = -1)$  est négligeable. La variable  $X$  prend la valeur  $-1$  si on n'obtient jamais deux *Pile* consécutifs. On peut alors écrire

$$P(X = -1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k^c\right)$$

La suite  $(U_n)$  étant croissante au sens de l'inclusion (si on a deux *Pile* consécutifs au cours des  $n$  premiers lancers, on les a *a fortiori* au cours des  $(n+1)$  premiers lancers), le théorème de la limite monotone nous donne  $P(\bigcap_{k=1}^{+\infty} U_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n) = 1$  et donc  $P(X = -1) = 1 - 1 = 0$ .

Partie C – étude de l'espérance de  $X$ .

Dans cette partie, on pose pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $v_n = 1 - u_n$  et  $S_n = \sum_{k=2}^n kP(X = k)$

7. Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ ,  $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$ .

Soit  $n \geq 4$ .

$$\begin{aligned} v_n - v_{n+1} &= (1 - u_n) - (1 - u_{n+1}) && (\text{par définition de } v_n \text{ et } v_{n+1}) \\ &= u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) && (\text{d'après 4.c}) \\ &= \frac{1}{8}v_{n-2} && (\text{par définition de } v_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\forall n \geq 4, v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$$

8. Justifier que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}$ .

$$u_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_k = \sum_{k=2}^n a_k + a_{n+1} = u_n + P(X = n + 1)$$

Ainsi  $u_{n+1} - u_n = P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}$  d'après le calcul précédent.

9. Démontrer alors par récurrence que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n$

10. En déduire que la suite est croissante et majorée.

- La relation précédente donne  $S_n \leq 6$  puisque  $v_n \geq 0$ .
- De plus,  $S_{n+1} - S_n = (n + 1)P(X = n + 1) \geq 0$  car une proba est toujours positive : cette suite est donc croissante.

11. Montrer que  $X$  admet une espérance.

Cela est vrai ssi la série des sommes partielles  $(S_n)$  converge absolument ssi elle converge (termes positifs).

Or d'après Q10, elle converge (théorème de convergence monotone).

**12a.** Démontrer que la suite  $(nv_n)_{n \geq 2}$  converge vers un réel  $\lambda$ .

D'après Q9,

$$nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$$

Or  $(v_n)$  converge vers 0 (car  $(u_n)$  cv vers 1),  $(S_n)$  converge donc par somme,  $(nv_n)$  aussi.

**12b.** Montrer que si  $\lambda \neq 0$  alors la série de terme général  $v_n$  est divergente.

En déduire à l'aide de Q7 que  $\lambda = 0$ .

Si  $nv_n \rightarrow \lambda \neq 0$  alors  $v_n \sim \frac{\lambda}{n}$ .

Par critère d'équivalence, on aurait alors la série  $\sum v_n$  qui divergerait.

Or d'après Q7,

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=4}^{n+2} v_{k-2} = 8 \sum_{k=4}^{n+2} (v_k - v_{k+1}) = 8(v_4 - v_{n+1}) \rightarrow 8v_4$$

D'où l'absurdité.

Ainsi,  $nv_n \rightarrow 0$

**12c.** Déterminer alors  $E(X)$ .

$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - v_n \rightarrow 6 - 0 - 0$$

Et donc par définition,  $E(X) = 6$ .