

Nombres complexes – Exercices

Exercice 1

1. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

$$\text{a. } z_1 = \frac{1+i}{i} \quad \text{b. } z_2 = \frac{1}{1-i} \quad \text{c. } z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$$

2. On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 1+i \quad \text{et} \quad z_2 = 5-2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } z_1 + z_2 & \text{b. } z_1 - z_2 & \text{c. } z_1 - 2z_2 \\ \text{d. } z_1 \times z_2 & \text{e. } \frac{z_1}{z_2} & \text{f. } \frac{z_2}{z_1 - z_2} \end{array}$$

3. Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x+2i)(1-xi)$$

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .
- Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel ?
- Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre imaginaire pur ?

Exercice 2

Ecrire sous forme algébrique : $z_1 = \frac{7+i}{3-2i} \quad z_2 = \frac{-3}{(1+i)(2-i)}$

Exercice 3

Déterminer le conjugué du nombre complexe suivant et l'écrire sous forme algébrique :

$$z_1 = \frac{2+i}{1-2i}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 3z + iz = 0 & \text{b. } z + 2iz = i & \text{c. } z + 2 - i(z+1) = 0 \\ \text{d. } \frac{z-5}{z-i} = i & \text{e. } 2iz - 3 = z+1 & \text{f. } 3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz \\ \text{g. } \frac{z-1}{iz+3} = 4i & \text{g. } 3z(z+i) = -iz & \text{h. } -\frac{z}{iz+1} + \frac{3z}{z-1} = 3+i \end{array}$$

Exercice 5

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, les équations suivantes

- $(2+3i)z - (5+2i) = 3z + 4i$.
- $(7-i)\bar{z} = 3$.
- $iz + 2\bar{z} = i - 1$.

Exercice 6

Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. 2z^2 - 6z + 5 = 0 & 2. z^2 + z + 1 = 0 & 3. z^2 - 5z + 9 = 0 \\ 4. z^2 - 3z + 4 = 0 & 5. z^2 - z + 10 = 0 & 6. z^2 - 4z - 1 = 0 \end{array}$$

Exercice 7

On considère sur $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(E) \quad (z-2)(z^2 + a \cdot z + b) = 0$$

2. Résoudre l'équation (E)

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$$

- Vérifier que pour tout nombre complexe z , $f(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

Exercice 9

1. Dans $\mathbb{C}$ on considère le polynôme $z^2 + 6z + 25$; déterminer ses racines.

2. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :

$$a = (1+2i)^2 \quad ; \quad b = (1-2i)^2$$

3. En déduire les solutions de l'équation :

$$z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \bar{z} + \frac{1}{4} = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 + 4z^2 - 21 = 0$.

Exercice 11

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^4 - 4z^3 + 4z^2 - 4z + 3$.

- Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z , $P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$.
- En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P .

Exercice 12

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

- Calculer $P(i)$.
- Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2 + pz + q)$.
- Montrer que les solutions de $P(z) = 0$ sont les affixes des sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Exercice 13

Pour tout nombre complexe z différent de 1, on définit $Z = \frac{z-2i}{z-1}$.

On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ avec x, y, X et Y réels

- Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 14

Pour tout nombre complexe z différent de i , on définit $Z = \frac{z+3}{z-i}$.

On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ avec x, y, X et Y réels

- Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 15

Calculer le module de chacun des nombres complexes donnés :

- $z_1 = 1+3i$
- $z_2 = 3-4i$
- $z_3 = -1+7i$
- $z_4 = -5-3i$

Exercice 16

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés :

- $z_1 = -1+i$
- $z_2 = i$
- $z_3 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$
- $z_4 = (2+2i)(1-i)$
- $z_5 = i(\sqrt{6}-i\sqrt{2})$
- $z_6 = \frac{\sqrt{3}+i}{2i}$

Exercice 17

On considère le nombre complexe : $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$

- Ecrire z^2 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z .
- Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 18

Soit : $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $Z_2 = 1-i$; $Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$

- Mettre Z_3 sous forme algébrique.
- Déterminer le module et l'argument de Z_1 et de Z_2 .
- Ecrire Z_3 sous forme trigonométrique. En déduire : $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 19

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -3 - i\sqrt{3}$.
Ecrire ensuite la forme exponentielle du produit $z_1 z_2$.

Exercice 20

Ecrire les nombres suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = (3 + i\sqrt{3})^4 \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} \quad z_3 = \frac{\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}}$$

Exercice 21

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\pi/2$.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
 - a. Dédire de 1) une solution de l'équation (E).
 - b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Dédire également de 1) une solution de l'équation (E') : $z^3 = -8i$.

Exercice 22

On considère le nombre complexe $a = (-\sqrt{3} + i)^{2013}$.

- 1) Déterminer la forme exponentielle de : $-\sqrt{3} + i$
- 2) Montrer que a est un imaginaire pur

Exercice 23

On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right)$$

Montrer que le triangle ABC est un triangle équilatéral.

Exercice 24

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.

- 1) Rapeller les expressions de : $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$
- 2) Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

Exercice 25

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives $z_A = -1$,

$$z_B = 2 + i\sqrt{3}, \quad z_C = 2 - i\sqrt{3} \text{ et } z_G = 3.$$

- a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
- b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
- c. Calculer un argument du nombre complexe :

$$\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$$

En déduire la nature du triangle GAC.

Exercice 26

Représenter les ensembles suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \left\{ M(z) / \arg(z + 3i) = \frac{\pi}{6} \text{ (}\pi\text{)} \right\} & \left| \begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \{ M(z) / |z + 4 + i| = |z - i| \} \\ \mathcal{E}_3 &= \{ M(z) / |z - 4i| = 2 \} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Exercice 27

Représenter les ensembles suivants sur le graphique ci-dessous (on ne demande pas de justification)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \left\{ M(z) / \arg(z - 2i + 1) = \frac{2\pi}{3} \text{ (}2\pi\text{)} \right\} & \left| \begin{aligned} \mathcal{E}_3 &= \left\{ M(z) / Z = i \frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i} \in \mathbb{R}_+ \right\} \\ \mathcal{E}_2 &= \left\{ M(z) / \arg\left(\frac{z - 2i + 1}{z - 3 + i}\right) = \pi \text{ (}2\pi\text{)} \right\} & \mathcal{E}_4 &= \{ M(z) / |z + 2 + i| = |z - 2i| \} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Exercice 28

Déterminer les lieux de points décrits par le point $M(z)$, où z est un nombre complexe :

1. $|z| = |\bar{z} - 2 + i|$
2. $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{4}$
3. $z^2 - 2\bar{z} + 1 \in \mathbb{R}$
4. $z^2 - 2\bar{z} + 1 \in \mathbb{R}$

Exercice 29

- 1) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :
 - a) $|z - 1| = |z - i|$
 - b) $|z + i| = 4$
- 2) Donner, dans chaque cas, une équation cartésienne de l'ensemble trouvé.

Exercice 30

A chaque point M d'affixe z du plan complexe, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2}{1+iz}$.

- 1) On note A le point d'affixe -2 et B celui d'affixe i .
Interpréter géométriquement le module de z' .
- 2) Déterminer géométriquement l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
Donner une équation cartésienne de cet ensemble.

Exercice 31

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2cm), on considère les points A et B d'abscisses respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i \left(\frac{z - 3i}{z + 1} \right)$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$.
Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(D) = C$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC .
3. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :

$$\frac{OM'}{AM} = \frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'} \right) = \frac{\pi}{2} + \left(\vec{MA}, \vec{MB} \right) \quad [2\pi]$$

4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
 - a. L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur un cercle (Γ) de centre O , de rayon 1.
 - b. L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Exercice 32

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Affirmation 1 :

Le point d'affixe $(-1 + i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

2) Affirmation 2 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation : $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

Exercice 33

- 1) **Affirmation 1** : les points A , B et C sont alignés.
- 2) **Affirmation 2** : les points B , C et D appartiennent à un même cercle de centre E .
- 3) **Affirmation 3** : L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.
- 4) **Affirmation 4** : Le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^4$ est un nombre réel.

Exercice 34

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre ou trois propositions est exacte. Une réponse **exacte** rapporte 1 point ; une réponse **inexacte** enlève 0,5 point ; l'**absence** de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

- 1) Soit $z_1 = \sqrt{6} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. La forme exponentielle de $i \frac{z_1}{z_2}$ est :
- a) $\sqrt{3} e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b) $\sqrt{12} e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c) $\sqrt{3} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d) $\sqrt{3} e^{i\frac{13\pi}{12}}$
- 2) L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z , admet :
- a) une solution
b) deux solutions
c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.
d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.
- 3) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + i| = |z - i|$.
- a) Γ est l'axe des abscisses.
b) Γ est l'axe des ordonnées.
c) Γ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
- 4) On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- a) Le triangle OBC est isocèle en O .
b) Les points O, B, C sont alignés.
c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B .

Exercice 35

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

- 1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
- a) 3 b) i c) $3 + i$
- 2) Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :
- a) $|z| + 1$ b) $|z - 1|$ c) $|\bar{z} + 1|$
- 3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :
- a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$
- 4) Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
- a) $n = 3$ b) $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$ c) $n = 6k, k \in \mathbb{N}$
- 5) Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1 . l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :
- a) la droite (AB) b) le cercle de diamètre $[AB]$ c) la droite perpendiculaire à (AB) passant par O
- 6) Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :
- a) $y = -x + 1$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel
- 7) Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :
- a) $1 - 4i$ b) $-3i$ c) $7 + 4i$
- 8) L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :
- a) $\{1 - i\}$ b) L'ensemble vide c) $\{1 - i; 1 + i\}$

Annales du baccalauréat

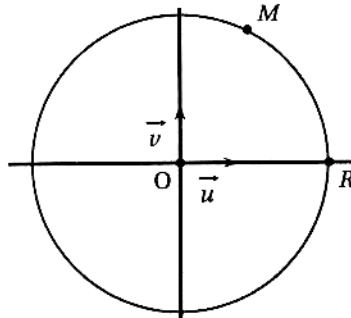
Exercice 36

Antilles-Guyane - 22 juin 2015

Partie A

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $(O; \vec{u})$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z .
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right)$.

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M' .

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0 .

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
 - a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
 - b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

Exercice 37

Métropole La réunion - 22 juin 2015

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
 - a. Calculer le module et un argument du nombre a .
 - b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
 - c. Montrer que les points A , B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
 - d. Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A' , B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - a. Montrer que $b' = 8$.
 - b. Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
 - a. On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R , S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$. Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
 - b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 38

Asie - 16 juin 2015

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

- b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
- a. $j^3 = 1$;
- b. $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que $AC = BC$.
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 39

Polynésie - 12 juin 2015

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 40

Polynésie - 12 juin 2015

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

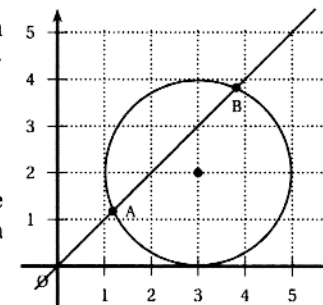
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z - 1| = |z - i| \quad \text{et} \quad |z - 3 - 2i| \leq 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.

Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

Affirmation 2 : le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est un réel.

Exercice 41

Amérique du Nord - 2 juin 2015

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n , on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n ; y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n , $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n .

- a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?
- b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n , $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.
- c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $z_n = e^{in\theta} z_0$.
- d. Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .
- e. Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n .
Représenter θ
Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .

Exercice 42

Centres étrangers - 12 Juin 2014

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 &= 16 \\ z_{n+1} &= \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe $z_n : r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a) Calculer z_1, z_2 et z_3 .
b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'annexe, à rendre avec la copie.
c) Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .
2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente ?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.
On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3 , etc.
Ainsi $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.
3. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n : A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.
b) Donner une expression de L_n en fonction de n .
c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

Exercice 43

Liban - 27 Mai 2014

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
5. Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 .
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$.
En déduire la forme exponentielle de z_1 .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 44

Pondichéry - 8 Avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) z_n.$$

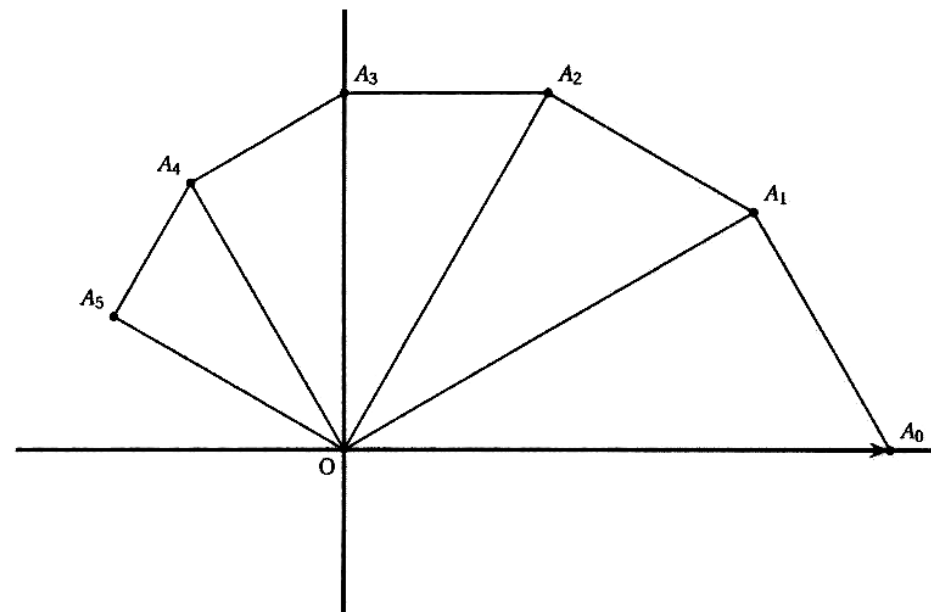
On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .
c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

- a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?
- b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme?
4. a. Démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .
b. On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9 .
Les traits de construction seront apparents.

À compléter et à rendre avec la copie



Exercice 45

Polynésie - 5 Septembre 2017

On rappelle que pour tout réel a et tout réel b ,

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -x + 2$.

1. Montrer que si le réel θ appartient à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]$, alors
 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

2. Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nulle. On note $\rho = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z ; les nombres ρ et θ sont appelés coordonnées polaires du point M .

Montrer que le point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si ses coordonnées polaires sont liées par la relation :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}, \text{ avec } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right[\text{ et } \rho > 0.$$

3. Déterminer les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine O du repère.

Exercice 46

Nouvelle Calédonie – 28 Novembre 2017

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O .

- Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
 - Démontrer alors que, pour tout entier naturel n , les points O , A_n et A_{n+4} sont alignés.
- Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel?

Exercice 47

Nouvelle Calédonie – Mars 2019

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0.$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z-3| = |z+3|.$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = (1 - i\sqrt{3})^n.$$

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n , les points M_n , O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π .

Exercice 48

Nouvelle Calédonie – Novembre 2018

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point du plan d'affixe z_n .

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n .

On note C le point d'affixe i .

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout entier naturel n .
- Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i).$$

- Pour tout entier naturel n , calculer, en fonction de n , le module de u_n .
 - Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - i| = 0.$$

- Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat?

- Soit n un entier naturel. déterminer un argument de u_n .
 - Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , le point A_n appartient à la droite d'équation réduite :

$$y = -x + 1.$$