On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3.

On rappelle que pour démontrer qu'une matrice P est inversible, il suffit de démontrer qu'il existe une matrice Q telle que $P \times Q = I$.

Q est appelée alors matrice inverse de P.

On note dans tout le problème $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE A

Puissances et inverse d'une matrice

▶ **1.** Calculer A^2.

▶ **2.** Démontrer que $A^2 = A + 2I$ (E).

▶ **3.** Utiliser de façons indépendantes l'égalité (E) pour :

a) calculer A^3,

b) démontrer que $\frac{1}{2}A(A - I) = I$.

▶ **4.** En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}.

PARTIE B

Stock et matrice

Une entreprise fabrique trois produits X_1, X_2 et X_3 à partir de trois unités de production U, V, W.

- La fabrication d'un produit X_1 consomme une unité V et une unité W.
- La fabrication d'un produit X_2 consomme une unité U et une unité W.
- La fabrication d'un produit X_3 consomme une unité U et une unité V.

Un programme de fabrication est défini par les trois valeurs : x, la quantité de produit X_1 fabriquée, y, la quantité de produits X_2 fabriquée et z la quantité de produit X_3 fabriquée.

Sachant que l'entreprise dispose d'un stock de 5 unités U, 12 unités V et 13 unités W, on cherche à déterminer, s'il existe, un programme de fabrication qui épuise exactement le stock disponible.

▶ **1.** Trouver une équation matricielle résumant le problème posé dont l'inconnue serait la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

▶ **2.** En utilisant un résultat établi dans la partie **A**, résoudre l'équation matricielle obtenue et conclure.