Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement

Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.

L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.

Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel *n*, l'état probabiliste de la semaine *n* est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \quad b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine *n* et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine *n*.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b. Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3 \quad 0{,}7)$.
4. a. Exprimer, pour tout entier naturel *n*, P_n en fonction de P_0 et de *n*.
   b. En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.

Dans la question suivante, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Soit $P = (a \quad b)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   a. Déterminer *a* et *b*.
   b. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.