TS **MATRICES** feuille 25

EXERCICE 32

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Soit x un réel et V une matrice colonne de dimension 2×1 non nulle.

a) Démontrer que $AV = xV \Leftrightarrow (A - xI_2)V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que le déterminant de la matrice $A - xI_2$ est nul.

c) En déduire les deux valeurs possibles λ et μ de x.

2) Déterminer deux matrices $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ non proportionnelles telles que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$.

3) Soit $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

4) En déduire l'expression de A^n pour tout entier naturel non nul n.

EXERCICE 33

On considère la suite u_n définie par $u_0 = \dfrac{3}{5}$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout entier naturel n.

1) Calculer u_2, u_3, u_4.

2) Identifier la matrice A, carrée d'ordre 2, telle que $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

3) Démontrer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

4) Soit $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

c) Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

6) Calculer la limite de la suite (u_n).