109. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On souhaite calculer A^n pour tout entier n. Posons $B = N + D$, où

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $DN = ND$.
2. Calculer N^2.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ on a $A^n = (N + D)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} ND^{n-1}$.
4. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 2$.
5. L'expression de A^n calculée dans la question précédente reste-t-elle valable pour $n = 0$, $n = 1$?

110. corrigé On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. a. Démontrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.
b. Démontrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.
c. Démontrer que l'on a $A = PDP^{-1}$.
3. Démontrer que l'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et vérifier qu'elle est cohérente avec les résultats du 1..