

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 .

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$(I_2 + A)^n = I_2 + nA$$

2 Application

a. Soit $M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la matrice M_1^n .

b. Même question pour la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer T^2 .

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel, non nul:

$$(I_2 + T)^n = I + (2^n - 1)T.$$

c. Calculer pour tout entier naturel n non nul $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^n$.