107. On considère les matrices suivantes :

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3. En déduire pour tout $n > 3$ la valeur de A^n. (On rappelle que pour tout entier $k \geqslant 1$, $A^k = A^{k-1} \times A$).

2. À tout nombre réel x, on associe la matrice notée $M(x)$ où $M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$ $\quad(\mathbf{R_1})$.

a. Déterminer $M(0)$ et $B = M(4)$.

b. x et y étant deux réels quelconques, calculer en utilisant la relation $(\mathbf{R_1})$, le produit $M(x) \times M(y)$.

c. Montrer l'égalité :

$M(x) \times M(y) = M(x+y)$ $\quad(\mathbf{R_2})$.

3. Vérifier que $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En utilisant les résultats de la question **2.**, déterminer le nombre réel x' tel que

$$M(x) \times M(x') = I$$

En déduire une matrice B' telle que $B \times B' = I$.

D'après BTS - Info Gestion

108. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $B = A - I_3$. Calculer B^2 et B^3.

2. On souhaite calculer $A^n = (B + I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B + I_3)^n$? Pourquoi ?

b. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ on a $A^n = (B + I_3)^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.

En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 3$.

c. L'expression de A^n trouvée dans la question précédente reste-t-elle valable pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$?