**113.** Pour tout entier naturel $n$ on définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par : $\begin{cases} a_0 = 1,\ b_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$.

Dans cet exercice nous allons déterminer une expression explicite du terme général de chacune de ces deux suites.

1. Calculer les cinq premiers termes de ces deux suites.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Démontrer que l'on a $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on précisera.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = M^n U_0$.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer son inverse.

5. Démontrer que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale dont on donnera l'expression.

6. En déduire que $M = PDP^{-1}$ puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $M^n = PD^nP^{-1}$. Donner l'expression de la matrice $M^n$ en fonction de $n$.

7. En utilisant la question 3., démontrer que les termes généraux des deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{3} \times 2^n + \frac{1}{3} \times (-1)^n \\ b_n = \frac{2}{3} \times 2^n - \frac{2}{3} \times (-1)^n \end{cases}.$$