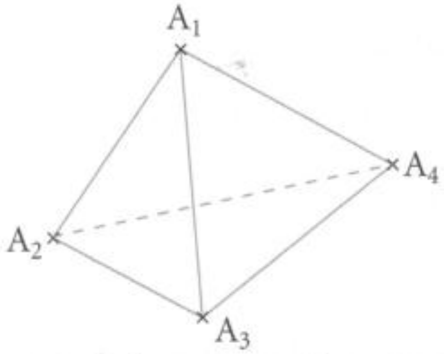
Une puce se déplace d'un sommet à l'autre d'un tétraèdre A_1, A_2, A_3, A_4.



Au départ, la puce est en A_1. À chaque saut, la puce peut se retrouver sur l'un des 3 autres sommets de manière équiprobable.

On définit pour tout entier naturel n, la variable aléatoire X_n représentant le numéro du sommet sur lequel se trouve la puce à l'issue du n-ième saut.Ainsi $X_0 = 1$.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance mathématique.

2. Écrire la matrice M de transition du système, c'est-à-dire la matrice dont le coefficient m_{ij} représente la probabilité de passage du sommet i au sommet j.

3. On convient que $M^0 = I_4$.

a) Démontrer l'existence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n, la matrice M^n s'écrit :

$$M^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

b) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

4. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

c) En déduire explicitement A^n en fonction de n.

5. Calculer u_n et v_n en fonction de n.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice ligne :

$$T_n = \begin{pmatrix} p([X_n = 1]) & p([X_n = 1]) & p([X_n = 3]) & p([X_n = 4]) \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $T_{n+1} = T_n M$.

b) En déduire que $T_n = T_0 M^n$.

c) En déduire la loi de X_n.

d) Que se passe-t-il après un grand nombre de sauts ?

7. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de sauts effectués pour que la puce se retrouve, pour la première fois, sur le sommet A_1.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} p([Y = k]) = 1$.

8. On définit $E(Y)$ en posant, si la limite existe :

$$E(Y) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} k\, p([Y = k]).$$

a) On pose $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Calculer $f_n'\left(\frac{2}{3}\right)$ et démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n'\left(\frac{2}{3}\right) = 9$.

b) Démontrer l'existence de $E(Y)$ et la calculer.

Interpréter ce résultat.