On considère la suite (F_n) définie par :

$F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. a. Calculer les dix premiers termes de la suite (F_n) définie ci-dessus.

b. On pose $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que l'on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^n U_0$.

2. a. On donne $P = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Calculer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

c. Démontrer que $A = PDP^{-1}$ puis que, pour tout entier n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Écrire explicitement les coefficients de la matrice A^n.

3. a. Déduire de la question 1.c. que le terme général de la suite (F_n) est :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

b. Vérifier cette formule pour $n = 2$ et $n = 3$ (bel exercice d'agilité à la calculatrice !)

Conclusion : parfois, l'expression explicite du terme général d'une suite est clairement moins exploitable que sa définition par récurrence !