HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°10 : Équations différentielles linéaires du 1er ordre, quelques problèmes supplémentaires

Coefficient constant

Exercice 1 [Mélange]. Un récipient de volume V égal à un litre est rempli d'eau jusqu'à raz-bord. À partir de l'instant $t = 0$, on déverse un colorant dans le récipient, avec un débit constant d égal à un centimètre cube par seconde.
On considère que le mélange s'effectue parfaitement et instantanément. On note $C(t)$ la concentration de colorant dans le récipient à l'instant t.

1) En faisant un bilan, montrer que $C(t)$ obéit à une équation différentielle que l'on déterminera.

2) En déduire l'expression de la concentration en colorant dans le récipient en fonction du temps.

Exercice 2 [Réaction chimique]. On considère une équation chimique réversible du premier ordre : un composé A peut se transformer (dans le rapport d'une molécule pour une molécule) en un composé B, et B lui-même peut se re-transformer en A (avec la même stoechiométrie 1 : 1); on note $c_A(t)$ et $c_B(t)$ les concentrations de A et B au temps t (tout se passe à volume constant).

i) Montrer que $c_A + c_B$ est une fonction constante.

Selon la loi d'action des masses, la vitesse d'une réaction est proportionnelle aux concentrations des réactants. On suppose donc que, entre deux instants t et $t+\Delta t$ (Δt petit), la quantité de composé A transformée en B est proportionnelle (le coefficient de proportionnalité, appelé constante ou coefficient de vitesse, est noté α) à Δt et à $c_A(t)$ ([1]); de même, entre ces deux instants, la quantité de B transformée en A est proportionnelle (coefficient noté β) à Δt et à $c_B(t)$.

ii) Ecrire le bilan pour c_A entre les instants t et $t + \Delta t$. Montrer que c_B et c_A vérifient la relation : $c_B'(t) + \beta c_B(t) = \alpha c_A(t)$.

iii) On suppose que, en $t = 0$, on avait 1 mole par litre de composé A et pas de composé B. Montrer que c_B vérifie l'équation différentielle $y'(t)+(\alpha+\beta)y(t) = \alpha$.

[1] Ceci est une *approximation*, valable uniquement pour Δt petit.

iv) Trouver une solution particulière constante de cette équation. En déduire que $c_B(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$.

v) Tracer les graphes de c_A et c_B.

Cas général

Exercice 3 [Cultivons notre jardin]. Un jardinier arrose son jardin avec un système de goutte à goutte alimenté par un réservoir de forme cubique. On suppose que, pour Δt petit, le volume d'eau qui sort entre les instants t et $t+\Delta t$ fait varier la hauteur d'eau dans le réservoir de façon proportionnelle, par un coefficient de proportionnalité α, à Δt et à la hauteur d'eau $h(t)$ à l'instant t.

1) En faisant un bilan entre les instants t et $t+\Delta t$ pour Δt petit, vérifier que :
   $h(t+\Delta t) = h(t) - \alpha h(t)\Delta t$

2) En déduire que h est solution de l'équation différentielle :
   $y'(t) + \alpha y(t) = 0$

3) Trouver toutes les solutions de l'équation ci-dessus. En déduire une expression de h en fonction de α et de $h_0 = h(0)$.

4) Le jardinier s'aperçoit que les tuyaux se bouchent au fil du temps. De manière empirique, il propose de poser $\alpha(t) = \alpha_0/(1+t)$ (α_0 constant), de plus le réservoir est maintenant alimenté en eau par un débit constant. Cette alimentation en eau fait varier la hauteur de $d.\Delta t$ pendant un intervalle de temps Δt. Avec ces nouvelles hypothèses, faire un nouveau bilan et en déduire que h est solution de l'équation :

$$y'(t) + \frac{\alpha_0}{1+t}y(t) = d\,.$$

5) Résoudre l'équation ci-dessus et en déduire que :

$$h(t) = \frac{d}{\alpha_0+1}(1+t) + (h_0 - \frac{d}{\alpha_0+1})(1+t)^{-\alpha_0}$$

6) Si le temps est donné en heures, on a mesuré : $\alpha_0 = 1$, $h_0 = 3$ mètres et $d = 2$ mètres par heure. De plus la hauteur du réservoir est de 4 mètres. Faire une étude de la fonction h et en déduire les réponses aux questions suivantes :

   a) le réservoir va t-il déborder ?

   b) Montrer que la fonction h admet un unique minimum pour $t \geq 0$ et calculer le temps où sera atteint ce minimum.