Primitives et intégrales - Exercices

Intégrales et propriétés

Exercice 1

On considère les fonctions $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ et $g(x)=1-x$.

En utilisant la définition d'une intégrale, calculer :

(a) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

(b) $\int_{0}^{3} g(x)dx$

(c) $\int_{-4}^{1} f(x)dx$

(d) $\int_{-5}^{5} g(x)dx$

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur [-1 ; 1] par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

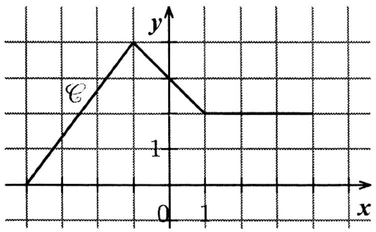
On note C la courbe représentative de *f*.

1. Vérifier que la courbe C est un demi-cercle de centre *O* et de rayon 1.

2. En déduire la valeur de $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$.

Exercice 3

Soit *f* la fonction affine par morceaux définie sur [-4 ; 4] par sa courbe représentation C.

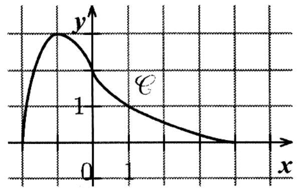


1. Calculer $\int_{-4}^{4} f(x)dx$.

2. Déterminer la valeur moyenne de *f(x)* sur [-4 ; 4].

Exercice 4

Soit *f* la fonction affine par morceaux définie sur [-2 ; 4] par sa courbe représentation C.



1. Justifier que $1\le\int_{0}^{1} f(x)dx\le2$.

2. Déterminer un encadrement de $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$, $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ et $\int_{1}^{4} f(x)dx$.

3. En déduire un encadrement de $\int_{-2}^{4} f(x)dx$.

Exercice 5

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par : $f(x)=e^{-3x}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2cm.

1. Tracer C.

2. Pour α réel non nul, on pose $I=\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

(a) Justifier l'existence de *I*.
(b) Donner le signe et une interprétation graphique de *I*.
(c) Représenter graphiquement *I*.

3. On définit sur ℕ* la suite (u_n) par : $u_n=\int_{0}^{1} f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$

(a) Donner pour tout *n* de ℕ*, le signe de u_n.

(b) Montrer que pour tout *n* de ℕ* : $I_1\le u_n\le e^{\frac{1}{n}}I_1$ avec $I_1=\int_{0}^{1} f(x)dx$

Exercice 6

Pour tout entier n de ℕ*, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

1. **(a)** Etudier pour tout $x \in]0,+\infty[$, les variation de (I_n).

(b) Démontrer que, pour tout $n \in$ ℕ*, $I_n \geq 0$.

Conclure sur la nature de la suite

2. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} < I_n < \frac{1}{n}$

3. En déduire la limite de I_n.

Exercice 7

Pour n ∊ ℕ*, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x)\, dx$. On ne cherchera pas à calculer I_n.

1. Démontrer que pour tout n ∊ ℕ* : $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

2. Quelle est la limite de I_n ?

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par :

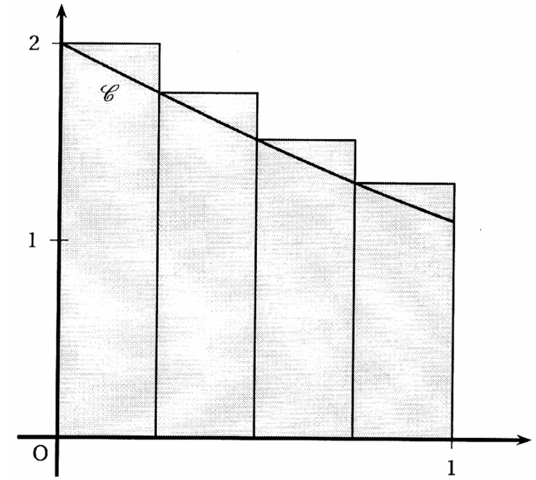
$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en calculant la somme d'aires de rectangles.

1. **(a)** Dans cette question, on découpe l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur.

- sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4} ; 1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-après.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

```
      Variables :  k est un nombre entier
                   S est un nombre réel
 Initialisation :  Affecter à S la valeur 0
     Traitement :  Pour k allant de 0 à 3
                       Affecter à S la valeur S + (1/4) f(k/4)
                   Fin pour
         Sortie :  Afficher S
```

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

(b) Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question *1. (a)*. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles construits.

On appelle $I = \int_0^1 (x+2)e^{-x} dx$

2. **(a)** Déterminer le signe de I.

(b) Etudier les variations de $f(x)$ puis donner un encadrement de I sur $[0 ; 1]$.

3. Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = (-x-3)e^{-x}$

(a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur ℝ.

(b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 9

On considère la fonction *f* définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}$$

1. On pose $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

(a) Interpréter géométriquement le réel I.

(b) Soient u et v les fonctions définies sur [0 ; 1] par $u(x)=x$ et $v(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.

Vérifier que $f=2(u'v+uv')$

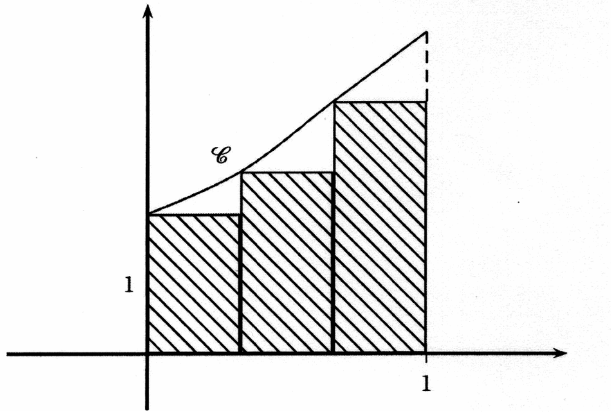
(c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

2. On donne l'algorithme ci-dessous.

```
      Variables :  k et n sont des entiers naturels
                   S est un nombre réel
         Entrée :  Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :  Affecter à S la valeur 0
    Traitement :  Pour k allant de 0 à n-1
                       Affecter à S la valeur S + (1/n) f(k/n)
                   Fin pour
         Sortie :  Afficher S
```

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

(a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



(b) Que dire de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Primitives

Exercice 10

On considère deux fonctions *f* et *F* définies sur *I*.
Dans chaque cas, montrer que *F* est une primitive de *f* sur *I*.

1. $F(x)=(x-1)(-x+4)$ $\quad f(x)=-2x+5$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $F(x)=(4x+1)e^{-x^2}$ $\quad f(x)=(-8x^2-2x+4)e^{-x^2}$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $F(x)=\dfrac{3x+1}{x-5}$ $\quad f(x)=\dfrac{-16}{(x-5)^2}$ $\quad I=\mathbb{R}\setminus\{5\}$
4. $F(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{5x+2}}$ $\quad f(x)=\sqrt{5x+2}$ $\quad I=\left]-\dfrac{2}{5}\,;+\infty\right[$

Exercice 11

Donner une primitive sur l'intervalle *I* de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-\dfrac{15}{2}x^3+\dfrac{3}{7}x+\dfrac{1}{2}$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad I=\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$
3. $f(x)=(2x+1)(x^2+x-7)$ $\quad I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=(3x-1)^6$ $\quad I=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\dfrac{4}{(2x-1)^4}$ $\quad I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$
6. $f(x)=6xe^{x^2+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 12

Donner une primitive sur l'intervalle *I* de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sin(x)\cos^2(x)$ $\quad I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=4\cos(2x+1)$ $\quad I=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ $\quad I=\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
4. $f(x)=\cos x\sin^4 x$ $\quad I=\mathbb{R}$
5. $f(x)=\sin^2 x$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 13

Donner une primitive sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ $\quad I=]4\ ;+\infty[$
2. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ $\quad I=]0\ ;+\infty[$
3. $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}$ $\quad I=]-\pi\ ;\pi[$
4. $f(x)=\tan x$ $\quad I=]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\dfrac{\pi}{2}[$
5. $f(x)=\dfrac{16x+4}{4x^2+2x+1}$ $\quad I=\mathbb{R}$

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $\quad g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$

1. Calculer $I_1=\displaystyle\int_1^e f(x)dx$.

2. Soit $I_2=\displaystyle\int_1^e g(x)dx$. Calculer I_1+I_2 et en déduire la valeur de I_2 .

Exercice 15

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout x élément de l'ensemble de f :

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}$$

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle]3 ;+∞[.

Exercice 16

Soit $f(x)=\cos^3 x$

1. Montrer que pour tout x ∈ℝ on a $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$.

2. En déduire la primitive F telle que $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Calcul d'intégrales

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^4 (t-3)dt$ **(b)** $\displaystyle\int_4^{-1} (t^2-4t)dt$ **(c)** $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2-\frac{1}{t}\right)dt$

Exercice 18

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-\frac{1}{t}\right)dt$ **(b)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)dt$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{-\pi} (\sin(2t))dt$

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I=\displaystyle\int_0^1 e^{1-2x}dx$

2. $J=\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}dx$

3. $K=\displaystyle\int_0^1 \cos(x)e^{\sin(2x)}dx$

4. $L=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^4}dx$

5. $M=\displaystyle\int_0^1 5^x dx$

6. $N=\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{1-x^2}dx$

7. $O=\displaystyle\int_0^1 x(x^2+2)dx$

8. $P=\displaystyle\int_{-1}^2 3^x dx$

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout x, $f(x)=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 21

1. Déterminer *a*, *b* et *c* tel que pour tout x ≠ -2 :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. En déduire $I = \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

Exercice 22

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (4e^t) dt$ **(b)** $\int_0^1 te^{t^2-1} dt$ **(c)** $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt$

Exercice 23

1. Résoudre l'inéquation $\ln t - 1 \leq 2\ln 3$.

2. **(a)** Soit f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x(1-\ln x)$.

Calculer $f'(x)$ pour tout x >0.

(b) En déduire $\int_1^e \ln x dx$.

3. Montrer que l'on a $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} dt = \ln\sqrt{\frac{e^2+1}{2}}$

Problèmes de synthèse

Exercice 24 *(devoir surveillé)*

On se propose de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale $L = \int_0^1 f(x)dx$ où f est la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$

1. Démontrer que pour tout x ∈ [0 ; 1] :

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

2. Soient *J* et *K* les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx \quad ; \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$$

(a) Calculer *J* et montrer que $J = 3 - 4e^{-1}$.

(aide : une primitive de $(2+x)e^{-x}$ est de la forme $(ax+b)e^{-x}$).

(b) Utiliser l'encadrement de la question *1.* pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

(c) Démontrer que *J* + *K* = 4L.

(d) En déduire un encadrement de *L*, puis donner une valeur approchée de *L* à 10^{-2} près.

Exercice 25 *(devoir surveillé)*

On considère la suite (x_n) définie pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$$

1. **(a)** Montrer que la suite (x_n) est à terme positifs.

(b) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $t \in [0 ; 1]$ on $t^{n+1}\cos t \leq t^n \cos t$.

(c) En déduire les variations de la suite (x_n).

(d) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. **(a)** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 26 *(devoir surveillé)*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.

2. **(a)** Démontrer que pour tout réel *t* de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul *n* :

$$(1-t)^n e^t \leq e \times (1-t)^n$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 27 (*Baccalauréat Nouvelle Calédonie Mars 2014*)

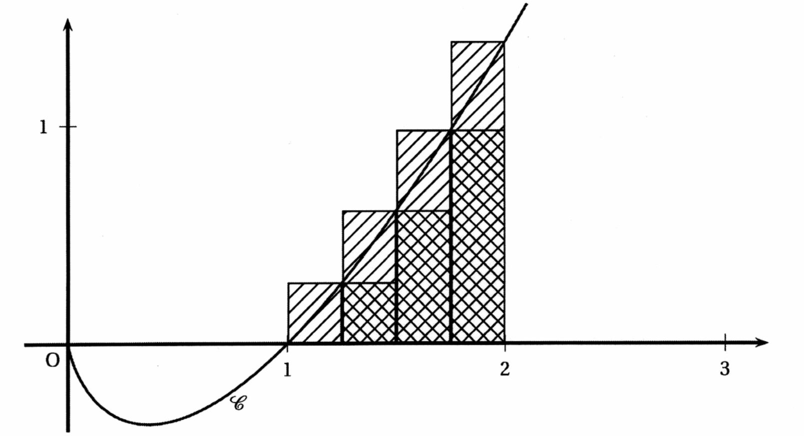
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ \ln x$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aires, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ (voir figure ci-après).




```
    Variables :  k et n sont des entiers naturels
                 U, V sont des nombres réels
Initialisation : U prend la valeur 0
                 V prend la valeur 0
                 N prend la valeur 4
   Traitement :  Pour k allant de 0 à n-1
                  Affecter à U la valeur U + (1/n) f(1 + k/n)
                  Affecter à V la valeur
V + (1/n) f(1 + (k+1)/n)
                 Fin pour
       Sortie :  Afficher U
                 Afficher V
```

1. **(a)** Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   (b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   (c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$V_n = \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]$$

On admettra que pour tout entier naturel non nul, $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$

(a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0$

(b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 ?

3. Soit F la fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$

(a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 28 (*devoir surveillé*)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x}$

1. **(a)** Etudier les variations de f sur l'intervalle I.
(b) En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit I.

2. **(a)** Vérifier que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = (x-1)\ln x$ est une primitive de f sur I.
(b) Justifier que F est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
(c) Démontrer que l'équation $F(x) = 1 - e^{-1}$ admet une unique solution, notée α sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Soient les fonctions g et h définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \ln x + 1$.

Soit $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ leurs courbes représentatives.

3. **(a)** Représenter $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$. Quelles sont les coordonnées de A, intersection de $\mathcal{C}_h$ avec l'axe des abscisses ?
(b) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équation $x = e^{-1}$ et $x = 1$. Démontrer que $\mathcal{A} = 1 - e^{-1}$.

5. t est un nombre supérieur à 1.
On note $\mathcal{A}_t$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$. On veut déterminer une valeur de t telle que : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_t$
(a) Démontrer que $\mathcal{A}_t\ (t-1)\ln t$.
(b) Conclure.

Exercice 29 *(devoir surveillé)*

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \text{ sur } [0;+\infty[\qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 30 *(devoir surveillé)*

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\,dx$$

Exercice 31 *(devoir surveillé)*

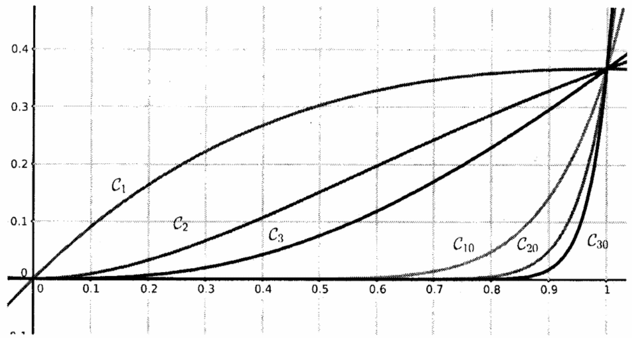
Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n, définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$, avec a et $b \in \mathbb{R}$. Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f_1 ; en déduire la valeur de I_1.
2. On a tracé ci-dessous $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$.



   a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant la démarche. Démontrer cette conjecture.

   b) En déduire que la suite (I_n) converge.

   c) Montrer que pour tout n non nul, $f_n(x) \leq x^n$ sur $[0;1]$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 32 *(devoir surveillé)*

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)e^{1-x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$$

   a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

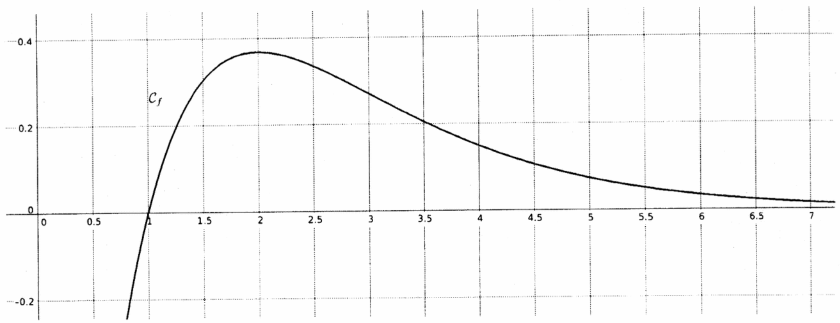
   b) Vérifier que $G(x) = -xe^{1-x}$ est une primitive de f sur $[1\ ;\ +\infty[$; en déduire que pour tout réel $x \in [1;+\infty[$, $F(x) = 1 - xe^{1-x}$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathcal{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

   a) Hachurer $\mathcal{D}_4$ sur le graphique.

   b) Exprimer l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_a$, en fonction de a.

   c) Déterminer $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a)$ et interpréter graphiquement.



Exercice 33 *(devoir surveillé)*

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3}\,dx \qquad J = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3x+5}\,dx \qquad K = \int_{-1}^{1} x e^{3x^2-1}\,dx$$

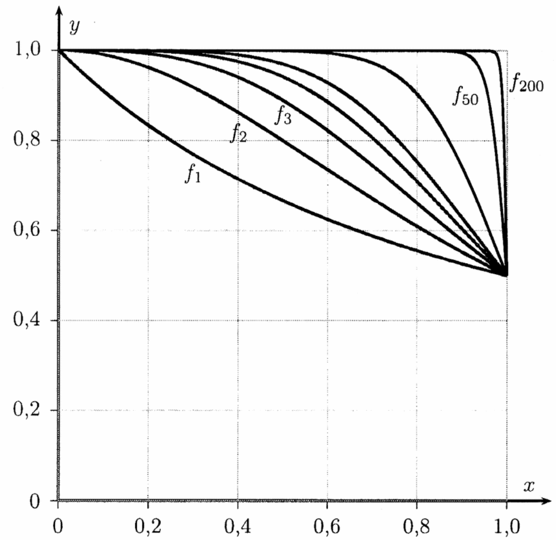
Exercice 34 *(devoir surveillé)*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1. a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n).
   b) Démontrer cette conjecture.
2. Calculer la valeur exacte de I_1.
3. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$
   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.
4. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.
6. À l'aide des questions précédentes, encadrer I_n pour tout entier naturel $n \geq 1$,
   démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.



Exercice 35 *(devoir surveillé)*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

1. a) Montrer $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Montrer que $u_1 = 1 - \ln(2/(1+e))$ et en déduire u_0.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.
   b) Montrer pour tout entier naturel n non nul, $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
3. Prouver que (u_n) converge vers une limite à déterminer.

Sujets baccalauréat

Exercice 1 *Métropole – Réunion – Septembre 2016*

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$

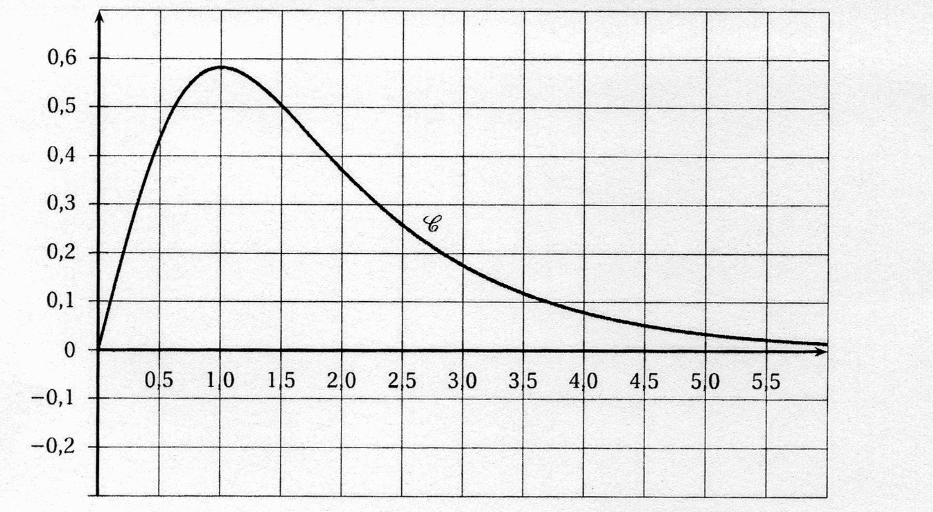
On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2}$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que : $H(x) = (-x-1)e^{-x}$
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0\,;\,6]$

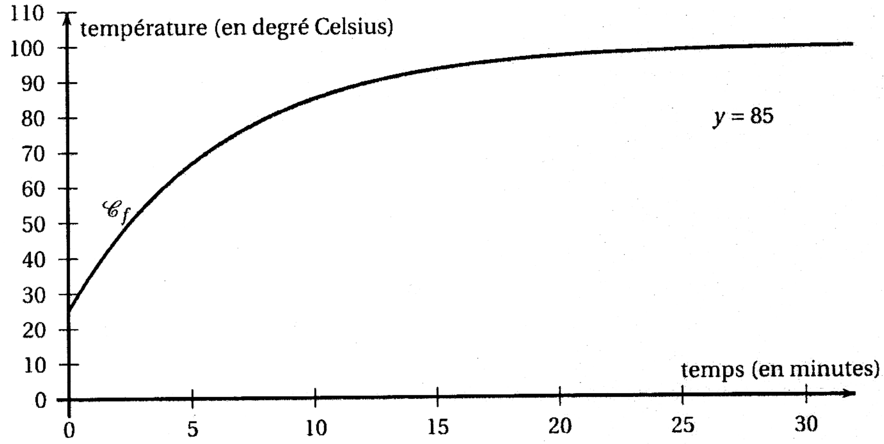


Exercice 2 *Pondichery – Avril 2016*

t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

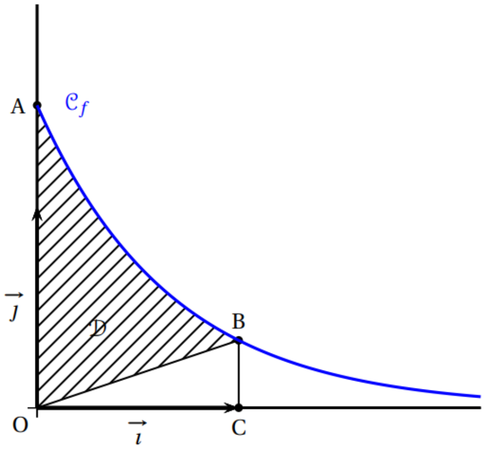
1. a. Étudier le sens de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



   a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.
   b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\displaystyle\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.
   c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

Exercice 3 *Polynésie – Juin2018*

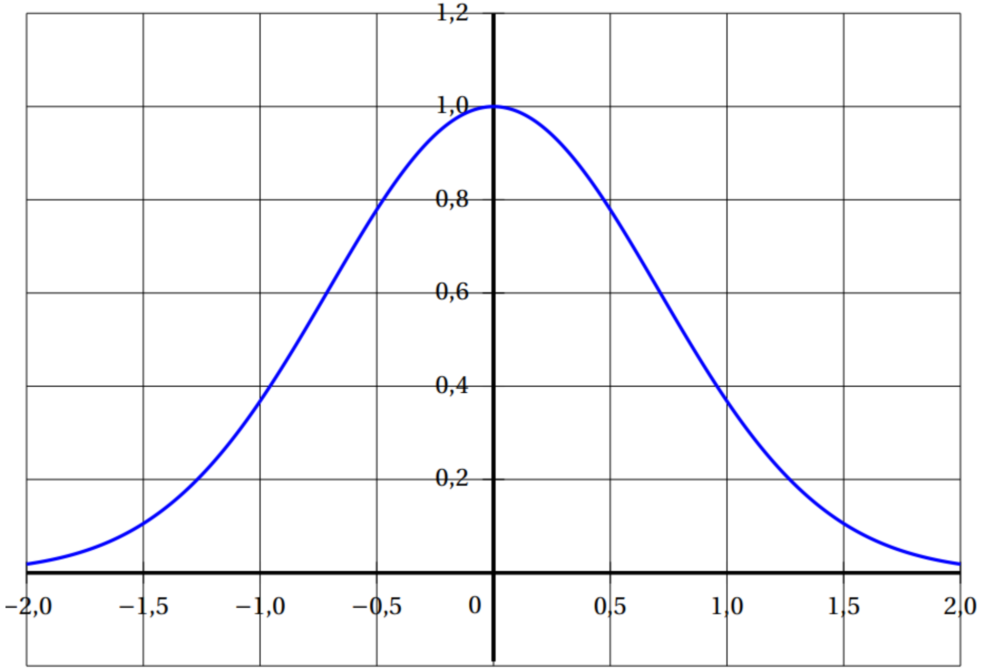
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = ke^{-kx}$ où k est un nombre réel strictement positif.
On appelle $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On considère le point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1.
Le point C a pour coordonnées $(1\,;0)$.



1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle du domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ et le segment [OB].
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ vaut le double de celle du triangle OCB.

Exercice 4 ***Métropole – Septembre 2019***

On donne ci-dessous la représentation graphique Cg dans un repère orthogonal d'une fonction g
définie et continue sur R. La courbe Cg est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et se situe dans le demi-plan $y > 0$.



Pour tout $t \in$ R on pose : $G(t) = \int_0^t g(u)\,du$

Partie A
Les justifications des réponses aux questions suivantes pourront s'appuyer sur des considérations graphiques.
1. La fonction G est-elle croissante sur $[0\,;+\infty[$? Justifier.
2. Justifier graphiquement l'inégalité $G(1) \leq 0{,}9$.
3. La fonction G est-elle positive sur R? Justifier

Partie B

La fonction g est définie sur R par $g(u)=e^{-u^2}$

On se propose de déterminer une majoration de $G(t)$ pour $t > 1$.

1. *Un résultat préliminaire*.

On admet que, pour tout réel $u > 1$, on a $g(u)\leq\frac{1}{u^2}$

En déduire que, pour tout réel $t > 1$, on a : $\int_1^t g(u)\,du\leq 1-\frac{1}{t}$

2. Montrer que, pour tout réel $t > 1$: $G(t)\leq 2-\frac{1}{t}$

Que peut-on dire de la limite éventuelle de $G(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?