Rochambeau 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à rendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1) a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\,,P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\ \text{ et }\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\,.$$

b) Exprimer $P(X_{n+1}=1)$ en fonction de $P(X_n=0)$, $P(X_n=1)$ et $P(X_n=2)$.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n=\begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) \end{pmatrix}$$

et on considère M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On admettra par la suite que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1}=R_n\times M$.
Déterminer R_1 et justifier que, pour tout entier naturel n, $R_n=R_0\times M^n$.

3) On admet que $M=P\times D\times P^{-1}$ avec :

$$P=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\,,\ D=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \text{ et }\ P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n=P\times D^n\times P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel n, $D^n=\begin{pmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) a) Calculer $D^n\times P^{-1}$ en fonction de n.

b) Sachant que $R_0P=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=0)$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=1)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(X_n=2)$.
Interpréter ces résultats.

