Antilles Guyane 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \qquad (E).$$

1) Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) ...............
                      (2) ...............
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c) Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0.$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right. .$$

1) On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \dfrac{15}{2^n} & 6 - \dfrac{6}{2^n} \\ -35 + \dfrac{35}{2^n} & 15 - \dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

4) Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

