Amérique du sud 2017. Enseignement de spécialité

EXERCICE 5 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S). Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

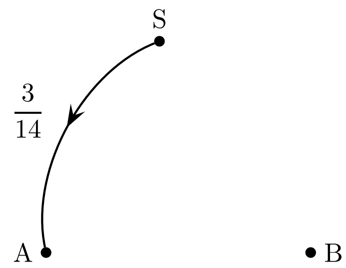
- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; il devient joueur solitaire avec une probabilité de $0,25$. Sinon, il rejoint l'équipe B ;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.
On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.
On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1) On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant.
Justifier que $p = \dfrac{3}{14}$.

2) a)

Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b) On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{3}{20} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} & \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{3}{14} & \dfrac{9}{14} & \dfrac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.
Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

c) Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3) On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a) Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?

b) En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4) On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a) Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ?
L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b) Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.

