Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°9 : Équations différentielles linéaires du 1er ordre, cas général

Appliquer le cours

Exercice 1 [Résoudre]. Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $y'(t) + ty(t) = 2t$, $y(0) = 1$.

ii) $y'(t) + \cos(t)y(t) = \cos(t)$, $y(1) = 4$.

iii) $y'(t) + \frac{2}{1+t}y(t) = t^3$, $y(0) = 0$.

Problèmes

Exercice 2 [Les antibiotiques, ...]. Pour soigner un patient on lui injecte dans le sang, par perfusion, à vitesse constante v (en ml/s), un antibiotique avec une concentration μ (en $\mu g/ml$). Une fois dans le sang, l'antibiotique est peu à peu éliminé par les urines. On note $S(t)$ la quantité d'antibiotique (en μg) présent dans le sang à l'instant t. On suppose que sur un intervalle Δt très petit, la quantité d'antibiotique qui passe du sang dans les urines est proportionnelle (par un coefficient $k > 0$) à Δt et à la quantité d'antibiotique restant dans le sang.

1) Faire le bilan sur la fonction S entre les instants t et $t + \Delta t$.

2) En déduire que la fonction S est solution approchée de l'équation différentielle :

$$y'(t) + ky(t) = \mu v.$$

3) Trouver la solution générale de cette équation différentielle. En déduire une expression approchée pour $S(t)$, en utilisant la condition initiale $S(0) = 0$.

4) On donne (pour cette question et la suivante) $\mu = 60\mu g/ml$, $v = 0,1ml/s$ et $k = 2s^{-1}$. Faire une étude rapide de la fonction S (pour t positif) et tracer son graphe.

5) On sait que l'antibiotique est dangereux lorsqu'il est présent dans le sang avec une quantité supérieure à $5\mu g$. Si on oublie la perfusion, pensez-vous que ce seuil risque d'être franchi?

6) On considère maintenant que le coefficient de proportionnalité k diminue avec le temps et tend vers 0 selon la loi $k(t) = 2/(t+1)$. Justifier que la nouvelle équation différentielle vérifiée par S est

$$y'(t) + \frac{2}{t+1}y(t) = \mu v.$$

7) Calculer la solution générale de cette équation différentielle.

8) En considérant la condition initiale $S(0) = 0$, en déduire la nouvelle expression :

$$S(t) \simeq \frac{\mu v[(t+1)^3 - 1]}{3(t+1)^2}.$$

Exercice 3 [Optionnel : Malthus strikes back]. Nous ne sommes pas encore satisfaits par le modèle de Malthus pour les populations (cf. exercice 3 de la feuille 8), aussi nous allons le modifier à nouveau . On considère maintenant que les taux de natalité et de mortalité dépendent du temps: k est donc une fonction de t (modélisant par exemple le fait que, grâce aux progrès de la médecine au cours du temps, la natalité peut augmenter tandis que la mortalité peut baisser), et N vérifie alors approximativement l'équation

$$y'(t) + k(t)y(t) = 0. \tag{1}$$

i) En supposant que $k(t) = 1/(1+t)$, résoudre cette équation et en déduire une expression approchée de N en fonction de la population initiale N_0.

ii) Comme dans l'exercice 3 de la feuille 8, on modifie maintenant la population par un apport extérieur $f(t)$, de sorte que N est maintenant solution approchée de l'équation $y'(t) + k(t)y(t) = f(t)$. Résoudre cette nouvelle équation en supposant que $k(t) = 1/(1+t)$ et $f(t) = 1$. En déduire une expression approchée de N.

iii) Tracer la courbe de la fonction $N(t)$ obtenue.