Faculté des Sciences Montpellier
LICENCE - Semestre impair 2020-21

HLMA103 BioMath
Feuille T. D. n°8 : Équations différentielles linéaires du 1er ordre, coefficient constant

Appliquer le cours

Exercice 1 [Vérifier une solution]. La fonction $e^{2t} + \sin(t)$ est-elle solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = 2y(t) + t^2 \cos(t)?$$

A-t-on besoin de savoir résoudre l'équation différentielle pour répondre à cette question ?

Exercice 2 [Résoudre]. Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $y'(t) + y(t) = \cos(2t)$, $y(0) = 2$.

ii) $y'(t) + 3y(t) = t$, $y(0) = 1$.

iii) $y'(t) + y(t) = 3 + t^2$, $y(0) = 0$.

iv) $y''(t) = 3$. Quels renseignements vous sont nécessaires pour déterminer $y(t)$ de manière unique ?

Modéliser

Exercice 3 [Modèle de Malthus]. On considère un modèle Malthusien de population, dans lequel la variation de population est proportionnelle à la population présente. Notons $N(t)$ la population à l'instant t.
Entre l'instant t et l'instant $t + \Delta t$ (où Δt est petit) la population d'une part augmente du fait des naissances d'une grandeur proportionnelle à $N(t)$ et à Δt, avec un coefficient de proportionnalité k_+ qui est le taux de natalité, et d'autre part, diminue du fait des décès d'une grandeur proportionnelle à $N(t)$ et à Δt avec un autre coefficient de proportionnalité k_- qui est le taux de mortalité.

1. Écrire le bilan entre les instants t et $t + \Delta t$.
2. En déduire que la fonction $N(t)$ est une solution approchée de l'équation différentielle $y'(t) = ky(t)$, où $k = k_+ - k_-$.
3. Résoudre cette équation. Exprimer la solution obtenue lorsque la population initiale (pour $t = 0$) est N_0.

4. (en option) Lorsqu'on écrit l'équation du bilan pour la fonction $N(t)$ ainsi obtenue, qu'observe-t-on ?

Afin de prendre en compte les phénomènes de migration, on modifie ce modèle de la façon suivante: entre les instants t et $t + \Delta t$, en plus de l'évolution naturelle de la population, il y a maintenant un apport de population venu de l'extérieur égal à à $f(t)\Delta t$, où $f(t)$ est une fonction donnée (noter que si $f(t) < 0$, cet apport est en fait un retrait).

5. Montrer que N est désormais une solution approchée de l'équation différentielle $y'(t) = ky(t) + f(t)$.

6. On suppose que $f(t) = t$. Résoudre l'équation différentielle[1] $y'(t) = ky(t) + t$. En déduire une expression de $N(t)$ en fonction de $N_0 = N(0)$. *(On pourra chercher une primitive de te^{-kt} sous la forme $(\alpha t + \beta)e^{-kt}$).*

Exercice 4 [En option]. L'aleurode des serres, ou *Trialeurodes vapurarium* Westwood, est un insecte qui s'attaque aux cultures en serres. Son cycle de vie comporte 6 stades: un stade d'oeuf, 4 stades larvaires et un stade adulte. Pour lutter contre ce parasite, il est important de connaitre l'évolution des effectifs de chaque stade; cela permet en effet de mettre au point une stratégie optimale d'application de l'insecticide (décider quand et pendant combien de temps épandre le produit), permettant de maintenir la population d'aleurode à des niveaux acceptables en utilisant le moins de produit possible ([2]).
On ne va considérer ici que les deux premiers stades: oeuf et premier stade larvaire. On note $N(t)$ la quantité d'oeuf présents à l'instant t et $L(t)$ la quantité de larves au premier stade à l'instant t. On suppose qu'il y a N_0 oeufs et aucune larve presents à $t = 0$, et on fait les hypothèses suivantes: *entre deux instants t et $t + \Delta t$ très proches, une proportion p_1 d'oeufs meurent, une proportion p_2 d'oeufs passent au premier stade larvaire, une proportion p_3 de larves de premier stade meurent et une proportion p_4 de larves de premier stade passent au deuxième stade, par unité de temps.*

i) Montrer que $N(t)$ vérifie $N'(t) = -kN(t)$ pour un $k > 0$ qu'on déterminera. Calculer $N(t)$.

ii) Montrer que $L(t)$ vérifie $L'(t) = p_2 N(t) - k' L(t)$ pour un $k' > 0$ qu'on calculera. Calculer $L(t)$.

iii) *(Cette question est indépendante des précédentes)* On suppose maintenant que, entre deux instants t et $t + \Delta t$, l'insecticide tue une quantité $Q\Delta t$ d'oeufs (Q est une constante positive). Trouver la nouvelle équation différentielle satisfaite par $N(t)$ et montrer que

$$N(t) \simeq (N_0 + \frac{Q}{k})e^{-kt} - \frac{Q}{k}.$$

Tracer $N(t)$ et commenter.

---

[1] Ajout du 18/11/2020 : une erreur de signe, présente dans la précédente version, a été corrigée.
[2] Voir El Shishiny H., Rodolphe F., Optimal chemical control of the Greenhouse Whitefly in *Pest and Pathogen Control: Strategy, Tactics and Policy Models* (Conway, ed.). International Series on Applied System Analysis. Wiley. Chichester.