# Equations différentielles - Exercices *TSTI2D*

**Exercice 1** Résoudre les équations homogènes :

a) $y'+y=0$ b) $y'-3y=0$ c) $y'=2y$ d) $3y'=y$ e) $y'=\dfrac{y}{5}$

**Exercice 2** Donner les solutions des équations différentielles :

a) $y'+2y=0$ b) $y'+2y=6$ c) $y'-3y=9$ d) $y'+2y=5$ e) $2y'+3y=-7$ f) $y'=-\dfrac{y}{4}+2$

**Exercice 3** Soit $(E)$ l'équation différentielle $2y'+y=2$.

1. Résoudre $(E)$.
2. Déterminer la solution de $(E)$ qui vérifie $y(0)=1$.

**Exercice 4** Résoudre l'équation différentielle $2y'+y=0$.
Déterminer la solution $f$ de cette équation vérifiant $f(\ln 4)=1$.

**Exercice 5** Résoudre les équations différentielles :

a) $y''+16y=0$ b) $9y''+y=0$ c) $4y''+25y=0$ d) $y''+5y=0$ e) $2y''=-5y$

**Exercice 6** Soit $(E)$ l'équation différentielle $y''+16y=0$.

1. Résoudre $(E)$.
2. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ vérifiant $f(0)=\dfrac{1}{10}$ et $f'(0)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

**Exercice 7** On considère l'équation différentielle $(E) : 4y''+\pi^2y=0$.

1. Résoudre $(E)$.
2. On sait de plus que la courbe représentative de la fonction $g$ solution de $(E)$ :
   — passe par le point $A\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   — a une tangente en $A$ parallèle à l'axe des abscisses.

   Déterminer $g$ et tracer l'allure de sa courbe représentative.

**Exercice 8** Résoudre l'équation différentielle $(E) : 4y''+9y=0$, puis déterminer sa solution $f$ qui vérifie les conditions $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$.

**Exercice 9** On considère l'équation différentielle $(E) : y''+\dfrac{1}{9}y=0$ où $y$ est une fonction de la variable réelle $t$.

1. Résoudre $(E)$.
2. Déterminer la solution de $(E)$ vérifiant les conditions initiales $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'(0)=\dfrac{1}{3}$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel $t$, $f(t)=2\sin\left(\dfrac{1}{3}t+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Exercice 10** On considère l'équation $(E) : y'-2y=0$. On note $f$ la solution de $(E)$ vérifiant $f(0)=1$ et $g$ la solution de $(E)$ vérifiant $g(0)=2$.

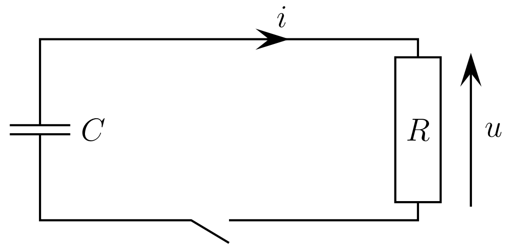
1. Déterminer les expressions de $f$ et $g$.
2. Donner les tableau de variations de $f$ et $g$, puis tracer dans un repère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ représentatives de $f$ et $g$.
3. Sur le graphique, tracer la droite $\Delta$ d'équation $y=2$.
   On note $A$ et $B$ les points d'intersection de $\Delta$ avec $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

a) Déterminer les coordonnées des points $A$ et $B$.

b) Tracer sur le graphique les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en $A$ et $B$.
Déterminer les coefficients directeurs de ces deux tangentes.

## Exercice 11

Un condensateur de capacité $C$, initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance $R$.
La tension $u$ est une fonction du temps $t$, en secondes, et vérifie l'équation différentielle $(E)$ : $RCu'(t) + u(t) = 0$.




On prend $C = 15.10^{-5}$ farads et $R = 2.10^4$ ohms.

1. Écrire l'équation différentielle $(E)$ vérifiée par la tension $u$ et la résoudre.
2. Déterminer la fonction $u$ solution de $(E)$ et telle que $u(t_0) = u_0$.
3. À partir de quel instant $t_1$ la tension devient-elle inférieure au dixième de sa valeur initiale ?
   On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde de $t_1$.
4. Calculer la valeur moyenne de $u$ entre les instants $t_0$ et $t_1$.
5. L'energie emmagasinée dans le condensateur à l'instant $t$ est, en joules, $W(t) = \dfrac{1}{2}C\,[u(t)]^2$.
   Calculer la valeur moyenne $W_m$ de cette fonction entre $t_0$ et $t_1$.

## Exercice 12

A. **Résolution de l'équation différentielle**

On considère l'équation $(E)$ : $y' + 0,01y = 24$, où $y$ est une fonction de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$.
2. Déterminer la solution $v$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale $v(0) = 0$.

B. **Étude d'une fonction**

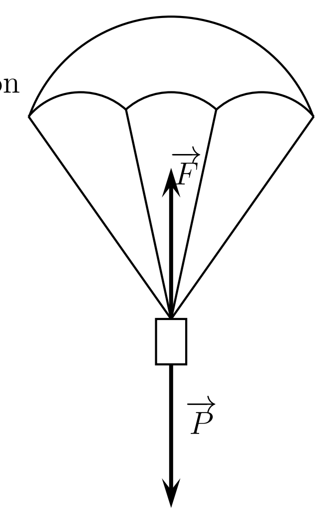
Soit $v$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $v(t) = 2400\left(1 - e^{-0,01t}\right)$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t)$.
2. Déterminer la fonction dérivée $v'$ de $v$.
   En déduire le sens de variation de $v$
3. Résoudre l'équation $v(t) = 1200$. Donner la valeur exacte puis approchée arrondie à $10^{-1}$.

## Exercice 13

La vitesse d'un objet soumis à son poids et aux frottements de l'air vérifie l'équation

$$(E) :\ v'(t) + 140v(t) = 10$$




où la fonction vitesse $v$, exprimée en $m.s^{-1}$, est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

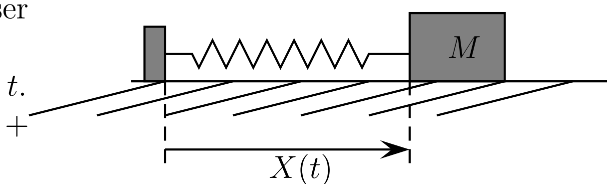
1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. Déterminer la solution $v$ de $(E)$ qui s'annulle pour $t = 0$.
3. Étudier la limite de $v$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
4. À quel instant $t_1$ la bille atteint-elle 95% de sa vitesse limite ?
   À quel instant $t_2$ en atteint-elle 99% ?

## Exercice 14

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
2. Déterminer la solution $f$ de cette équation vérifiant $f(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0) = 2$.
3. On rappelle que, pour tout réel $a$ et $b$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
   Vérifier que, pour tout réel $x$, $f(x) = \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.
4. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

## Exercice 15

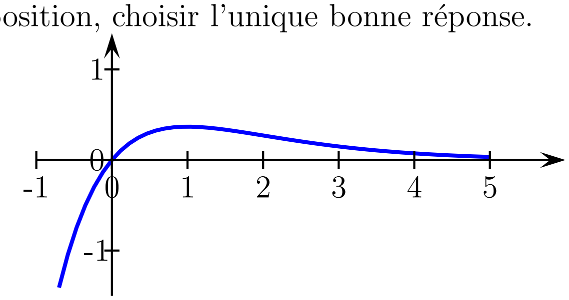
On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet qui peut coulisser sans frottement sur un plan.
On repère l'objet par sa position $X$ qui varie en fonction du temps $t$.
On admet que la fonction $X$ est solution de l'équation $(E)$ : $X'' + 100X = 0$.




1. Résoudre l'équation différentielle $(E)$.
2. Déterminer la solution particulière $X$ de $(E)$ telle que $X(0) = 10^{-1}$ et $X'(0) = 1$.
3. Vérifier que, pour tout réel $t$, $X(t) = 10^{-1}\sqrt{2}\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Vérifier que l'énergie mécanique $W$ du système, définie pour tout nombre réel $t \geqslant \in [0;+\infty[$ par $W(t) = 10^{-1}\left[X'(t)\right]^2 + 10\left[X(t)\right]^2$, est constante.
5. Déterminer la valeur moyenne de la fonction $X$ sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{10}\right[$.

## Exercice 16 Cet exercice est un QCM. Pour chaque proposition, choisir l'unique bonne réponse.

A. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
Sa courbe représentative est donnée ci-contre :




1. Pour tout réel $x$, $f'(x) =$ est égal à :
   a) $-e^{-x}$ b) $e^{-x}$ c) $(1-x)e^{-x}$
2. La tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0 a pour équation :
   a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = -x$
3. Une primitive $F$ de $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   a) $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$ b) $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ c) $F(x) = -xe^{-x}$
4. La valeur de $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ est :
   a) négative b) inférieure à 1 c) supérieure à 3

B. 1. Dans ce qui suit, $C$ est une constante quelconque.
L'équation différentielle $(E)$ : $2y' + y = 1$ a pour ensemble de solutions :
   a) $x \mapsto Ce^{-2x} - 1$ b) $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1$ c) $x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} - 1$

2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{3}\cos\dfrac{1}{3}x + \sin\dfrac{1}{3}x$.
$f$ est une solution de l'équation différentielle $(E)$ :
   a) $9y" + y = 0$ b) $y" + \dfrac{1}{3}y = 0$ c) $y" + 9y = 0$