TS EQUATION DIFFERENTIELLE *feuille 4*

Exercice 1 (4 points) *Commun à tous les candidats*

1. *Dans cette question, , on demande au candidat d'exposer ses connaissances.*
On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0)=1$.
Soit a un réel donné

a) Montrer que le fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = a\,y$.

b) Soit g une solution de l'équation $y' = a\,y$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a\,y$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2\,y + \cos x$.

a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x)=a\cos x+b\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2\,y$.

c) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0) .

d) En déduire les solutions de (E).

e) Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$