Exercice 4 (*7 points*)
Commun à tous les candidats

Partie A.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$.

1) Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $u(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y'+y=0$.
3) Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur **R,** est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).
4) En déduire toutes les solutions de (E).
5) Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

Partie B

k étant un nombre réel donné, on note f_k la fonction définie sur l'ensemble **R** par :

$$f_k(x)=(x+k)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les limites de f_k en $-\infty$ et $+\infty$.
2) Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x.
3) En déduire le tableau de variation de f_k.

Partie C.

1) On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0=\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel $n\geq 1$ par : $I_n=\int_{-2}^{0}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.
   a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.
   b) En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :
   $$I_{n+1}=(-2)^{n+1}\mathrm{e}^2+(n+1)I_n.$$
   c) En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2) Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie à la partie B.

   a) À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel k correspondant.

   b) Soit S l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer S en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.