

Fichier extrait du document
[Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)

Informations générales

Type : [Cours](#)

Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)

Matières : [Mathématiques](#)

Mots clés : probabilité, v.a, loi, v.a.r.d, espérance, variance, loi géométrique, loi de poisson, loi binomiale, loi de bernoulli, loi uniforme finie, scilab

Les fichiers du [document 1136](#)

- TD - Espaces probabilités infinis - Vard - Lois discrètes usuelles #doc-1136
- Cours - Espaces probabilités infinis - Vard - Lois discrètes usuelles #doc-1136
- Exercices corrigés du site

Le contributeur **pinel** précise : Partie A : on généralise la notion d'espace probabilisable dans le cadre fini, avec la notion de tribu. Théorèmes de limite monotone et conséquences, conditionnement et indépendance dans le cadre discret infini. Partie B : Etude des variables aléatoires discrètes infinies, fonction de répartition, moments d'une va et liens avec l'espérance et la variance (calculs de somme de séries). Partie C : rappels sur les lois finies usuelles (uniforme, bernoulli, binomiale avec simulations) et...

Derniers docs de CPGE ECS 1

- [C Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [C 2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- ? [Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [C 2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- ? [Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- ? [ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1136



revisermonconcours.fr

TD N°15

V.A.R.D – LOIS USUELLES DISCRETES

EXERCICE 1. On considère une particule se déposant à chaque seconde sur l'un des 3 sommets A, B et C d'un triangle suivant le procédé décrit ainsi :

- Si la particule se trouve en B , elle y reste
- Si la particule se trouve en A , elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des 3 sommets de façon équiprobable
- Si la particule se trouve en C , à la seconde suivante, elle y reste une fois sur 3 et elle va en B sept fois plus souvent qu'en A
- A la première seconde, elle se pose au hasard sur un des 3 sommets.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « à la seconde n , la particule se trouve en A (resp. B et C) ». On note a_n, b_n, c_n les probabilités correspondantes.

1. Que valent a_1, b_1, c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence liant $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ à a_n, b_n, c_n .
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{6^n}$. En déduire a_n et b_n en fonction de n .
4. Etudier la convergence de chacune de ces suites

EXERCICE 2. On dispose de 2 pièces d'apparence identique, la A donnant *pile* avec la probabilité $a \in]0; 1[$, la B donnant *pile* avec la probabilité $b \in]0; 1[$. Pour le premier lancer du jeu, on choisit une pièce au hasard et pour les coups suivants, on adopte la stratégie suivante : si on obtient *pile*, on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon, on change de pièce pour le lancer suivant. On note A_k « le $k^{\text{ième}}$ lancer se fait avec la pièce A », E_k « le $k^{\text{ième}}$ lancer amène *pile* ».

1. Trouver une relation en $P(E_k)$ et $P(A_k)$.
2. Trouver une relation en $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$.
3. En déduire $P(A_k)$ et $P(E_k)$.

PARTIE A – ESPACES PROBABILISES DENOMBRABLES INFINIS

EXERCICE 3. Une urne contient 2 boules blanches et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans cette urne en remettant la boule après avoir noté sa couleur, jusqu'à ce que l'on obtienne la boule rouge.

Montrer que l'on tire presque sûrement au moins une boule rouge.

EXERCICE 4. On considère une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir face est $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$. Deux joueurs A et B lancent alternativement la pièce, A commence.

Le premier joueur qui obtient face a gagné la partie.

Soit F_n : « le lancer n donne face » : on a $P(F_n) = p$ et $P(\bar{F}_n) = q$.

Notons A_n : « A gagne le jeu au lancer n », et A l'événement « A gagne le jeu » et notons T_n : « le jeu se termine au lancer n », et T l'événement « le jeu se termine ».

- 1a. Déterminer $P(A_1)$ et $P(A_3)$.
- 1b. Exprimer l'événement A_{2n+1} en fonction des événements F_k et en déduire $P(A_{2n+1})$.
- 1c. Exprimer A en fonction des événements A_{2n+1} et en déduire la probabilité que A gagne le jeu.
2. Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?
3. Déterminer la probabilité que B gagne le jeu.

EXERCICE 5. On considère une infinité d'urnes numérotées. L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On suppose que la probabilité de choisir l'urne numéro n est égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$).
Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

EXERCICE 6. Une enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que la probabilité que le galet ricoche pour la $n^{\text{ième}}$ fois, sachant qu'il a ricoché les $n - 1$ coups d'avant est égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité p_n que le galet coule au $n^{\text{ième}}$ ricochet ?
2. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

EXERCICE 7. Sur un grand réseau informatique des ordinateurs se transmettent une information de manières indépendantes. On suppose qu'à chaque transmission, l'information est transmise correctement avec la même probabilité $p \in [0; 1]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que l'information soit correctement transmise n fois consécutives.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

EXERCICE 8. Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et $k \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$. On dispose d'une urne qui contient k boules rouges et $N - k$ blanches. Une épreuve aléatoire consiste à effectuer indéfiniment des tirages d'une boule, avec remise. On note A_j l'évènement « aucune boule blanche obtenue lors des j premiers tirages », A l'évènement « au moins une boule blanche obtenue lors de cette épreuve ».

Calculer la probabilité $P(\bar{A})$ à l'aide des $P(A_j)$ puis donner la valeur de $P(A)$.

EXERCICE 9. *Inégalités de Boole*

1. Soit (A_n) une suite d'évènements. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$
2. En déduire que si la série de terme général $(P(A_n))$ converge,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)$$

PARTIE B – VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

EXERCICE 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) définit une densité de loi de probabilité.
On note alors X une v.a.r dont la loi est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n$.
2. Montrer que X ne possède pas d'espérance.
3. Montrer que $\sqrt{X}$ en possède une.

EXERCICE 11. Soit $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

1. Vérifier que la suite (u_n) définit une densité de loi de probabilité.

On note alors X une v.a.r dont la loi est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = u_n$.

2. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

3. La variable aléatoire réelle définie par $Y = e^{tX}$, où $t \in \mathbb{R}$, admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

EXERCICE 12. Une urne contient 10 boules rouges et 5 boules vertes.

On tire simultanément deux boules en les remettant à chaque fois, jusqu'à obtenir deux boules vertes. On note X le nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminer la loi de X .

2. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$

3. Montrer que X admet une variance et déterminer $V(X)$

4. On note $Z = X(X - 1)$. Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 13. On considère une pièce dont la probabilité de faire pile est $p \in]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On lance une fois la pièce, on note le résultat, puis on relance la pièce jusqu'à obtenir un résultat différent du premier. On note X le nombre de lancers nécessaires en tout.

Par exemple : Pour la séquence PPPF, on obtient $X = 4$.

1. Déterminer $X(\Omega)$.

2a. Pour $k \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = k)$ en fonction d'événements élémentaires.

2b. En déduire la loi de X .

3. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$

EXERCICE 14. On admettra dans cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

Une urne contient au départ une boule blanche. On lance plusieurs fois une pièce équilibrée.

Tant qu'on obtient « Face », on ajoute une boule noire dans l'urne et on relance la pièce. Lorsqu'on obtient « Pile », on tire une boule de l'urne et on s'arrête.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne au moment du tirage. On note B l'événement « On obtient la boule blanche au tirage »

1. Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \geq 1$.

2a. Pour tout $n \geq 1$, déterminer $P_{(X=n)}(B)$

2b. Quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule blanche ?

3. Démontrer l'égalité initialement admise, à l'aide d'une inégalité de Taylor appliquée à la fonction $f(x) = \ln(1 - x)$.

EXERCICE 15. On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $2/3$ tandis que celle de faire face est $1/3$. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention, pour la première fois, de deux piles consécutifs.

Ainsi, au cours des lancers $PFFPFPP \dots$, on a $X = 7$.

Soit n un entier naturel non nul, on note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

1. Expliciter les événements $(X = 2)$, $(X = 3)$, $(X = 4)$. Déterminer p_1, p_2, p_3, p_4 .

2. En distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geq 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$$

3. En déduire la loi de X .

4. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.

EXERCICE 16. On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On note P_k (resp. F_k) l'événement « faire pile (resp. face) au lancer k ». On note X la v.a qui vaut k si l'on obtient pour la première fois *pile* au lancer $k - 1$ puis *face* au lancer k (k désigne un entier supérieur ou égal à 2).

1. Montrer, en considérant le résultat du premier lancer, que

$$\forall k \geq 3, P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}$$

2. Pour $k \geq 2$, on pose $u_k = 2^k P(X = k)$. Reconnaître la suite (u_k) et en déduire $P(X = k)$ pour $k \geq 2$.

3. Montrer que X admet une espérance et déterminer $E(X)$.

EXERCICE 17. (*). On désigne par k et n deux entiers naturels non nuls. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule au hasard dans chaque urne et on note X_n la v.a.r désignant le plus grand des numéros obtenus, Y_n celle désignant le plus petit et N_j le numéro de la boule piochée dans l'urne j .

1. Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(X_n \leq i)$ puis en déduire la loi de X_n .

2. Montrer que $E(X_n) = n - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^k$ puis vérifier que $E(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nk}{k+1}$.

3. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, déterminer $P(Y_n > i)$ puis $P(Y_n = i)$.

4. Montrer que $E(Y_n) = \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^n i^k$ puis vérifier que $E(Y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{k+1}$.

EXERCICE 18. (**). On considère les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On suppose que $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on pose $Y = \sum_{k=1}^N X_k$.

Montrer (à l'aide de la définition de v.a) que Y est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

PARTIE C – LOIS USUELLES DISCRETES

EXERCICE 19. Soit X une v.a qui suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; 100 \rrbracket$. Déterminer $X^2(\Omega)$ et $E(X^2)$.

EXERCICE 20. Soit $p \in]0; 1[$. Prouver que si X suit la loi $B(p)$ alors $X = X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Attention à ne pas confondre égalité de loi et de v.a.r

EXERCICE 21. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules noires, ces boules étant indiscernables au toucher.

1. On effectue dans cette urne un tirage simultané de 2 boules et on note X la v.a qui vaut 1 si les deux boules piochées sont de la même couleur, 0 sinon. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

2. On renouvelle n fois l'épreuve précédente en remettant dans l'urne, à l'issue de chaque épreuve, les deux boules piochées. On note S la v.a qui compte le nombre de fois où deux boules de même couleur ont été piochées.

Donner la loi de S , son espérance et sa variance.

3a. On renouvelle l'épreuve de la question 1 avec remise, jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules de même couleur. En notant Y le rang de ce tirage, donner la loi de Y . Préciser son espérance et sa variance, après avoir justifié leurs existences.

3b. Soit Z le nombre de boules piochées. Donner la loi de Z , son espérance et sa variance.

EXERCICE 22. Soit X une v.a.r de support $\mathbb{N}^*$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique $G(p)$, $p \in]0; 1[$.

1a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X > k)$.

1b. Montrer que pour tout $(k, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a $P_{X>k}(X > k + m) = P(X > m)$.

2. On suppose désormais que X est une v.a.r.d de support $\mathbb{N}^*$ telle que

$$p = P(X = 1) \in]0; 1[\text{ et } \forall (k, m) \in \mathbb{N}^2, P_{X>k}(X > k + m) = P(X > m).$$

2a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X > k + 1) = P(X > k)P(X > 1)$.

2b. En posant $u_k = P(X > k)$, reconnaître la suite (u_k) et en déduire une expression en fonction de k et de p uniquement de $P(X > k)$.

2c. En déduire une expression de $P(X = k)$ pour $k \geq 1$ puis déterminer la loi de X .

EXERCICE 23.

1. On lance n fois simultanément un dé rouge et un dé blanc équilibrés et on note X la v.a égale au nombre de fois où la face du dé rouge est inférieure strictement à celle du dé blanc. Déterminer la loi de X .

2. On recommence indéfiniment cette épreuve de lancer de 2 dés et on note Y la première fois où la face du dé rouge est inférieure strictement à celle du dé blanc. Déterminer la loi de Y .

EXERCICE 24. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est $p^n/2$ quand $n \geq 1$; par ailleurs, la probabilité à chaque naissance d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Prouver par récurrence que pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. Déterminer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant. Déterminer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On considère une famille de n enfants ; déterminer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

5. Déterminer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

EXERCICE 25. On effectue une suite de tirage avec remise dans une urne contenant des boules blanches en proportion $p \in]0; 1[$ et des boules noires. Ces boules sont indiscernables au toucher. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_k la v.a égale au nombre de boules blanches obtenues lors des k premiers tirages et on note B_k « on obtient une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la v.a égale au numéro du tirage où on obtient la $n^{\text{ème}}$ boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_k .
- 2a. Déterminer $Y_n(\Omega)$ puis pour tout $i \in Y_n(\Omega)$, écrire l'événement $(Y_n = i)$ à l'aide de la v.a X_{i-1} et de B_i .
- 2b. En déduire la loi de Y_n .
- 2c. Prouver que cette v.a admet une espérance et la calculer.

EXERCICE 26. (*) Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m . Soit N la v.a égale au nombre de voitures arrivant au péage en une heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants.

Soit X la v.a égale au nombre de voitures se présentant au guichet numéro 1.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
2. Justifier que $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{N=n}(X = k)P(N = n)$.
3. En déduire que $P(X = k) = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{m}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\lambda \left(1 - \frac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.

EXERCICE 27. Soit $p \in]0; 1[$, X une v.a.r de support $\mathbb{N}^*$ et de fonction de répartition F telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = 1 - (1 - p)^n$. Donner la loi de X .

EXERCICE 28. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n , chaque numéro étant présent 2 fois. On effectue une suite de tirages simultanés de 2 boules de cette urne, et tant que les numéros des 2 boules ne portent pas le même numéro, elles sont remises dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On note T la v.a égale au rang où l'on obtient pour la première fois deux boules de même numéro. Déterminer la loi de T , son espérance et sa variance.

EXERCICE 29. On lance indéfiniment un dé équilibré et on note X la v.a qui désigne le nombre de lancers avant le premier 6.

1. Reconnaître la loi de la v.a $Y = X + 1$ et en déduire que X admet une espérance et une variance que l'on donnera.
2. Déterminer la loi de X .

EXERCICE 30. Soit un réel $a > 0$ et X une v.a de support $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n + 1) = \frac{a}{n} P(X = n)$$

1. Déterminer $P(X = n)$ en fonction de a , de n et de $P(X = 1)$.
2. En déduire $P(X = 1)$ puis donner la loi de X .
3. On pose $Y = X - 1$. Reconnaître la loi de Y , donner $E(Y)$ et $V(Y)$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.