

Fichier extrait du document [ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)

Informations générales

Type : [Cours](#)

Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)

Matières : [Mathématiques](#)

Mots clés : morphisme, dimension, rang, matrice

Les fichiers du [document 1104](#)

- TD - Applications Linéaires #doc-1095
- cours - Applications Linéaires #doc-1095
- Exos corrigés sur les app linéaires en dimension finie

Le contributeur **pinel** précise : En dimension finie, l'étude des applications linéaires se simplifient : espace image, $\text{Im}(f)$, rang d'un endomorphisme, image d'une famille libre par un morphisme injective, d'une famille génératrice par une application surjective, isomorphismes canoniques, espaces isomorphes, théorème du rang. Ensuite : matrice d'une application linéaire, opérations sur les bases, image d'un vecteur et rang de matrices.

Derniers docs de CPGE ECS 1

- [Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- ? [Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- ? [Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- ? [ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1104



revisermonconcours.fr

■ ■ TD ■ ■

APPLICATIONS LINEAIRES

I. GENERALITES

EXERCICE 1. Dire si les applications suivantes sont linéaires ou non :

$$\begin{aligned}
 f_1: \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\
 p &\rightarrow Xp' - p; & f_2: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y, z) &\rightarrow (x - y, 1); & f_3: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 & & (x, y) &\rightarrow (x, y, xy); \\
 f_4: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 (x, y, z) &\rightarrow (x - 2y, y); & \varphi: C^0(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 & & f &\rightarrow \int_0^1 x^2 f(x) dx & f_5: \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ converge}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 & & & & u &\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n
 \end{aligned}$$

EXERCICE 2. Soit $f: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $p \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$.

1. Prouver que $f \in L(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
- 4a. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle famille.
- 4b. La famille $\mathcal{B}'$ forme-t-elle une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$?

EXERCICE 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f: M_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{3,1}(\mathbb{R})$
 $X \mapsto AX$.

1. Prouver que $f \in L(M_{3,1}(\mathbb{R}))$.
2. L'application f est-elle injective ?
3. L'application f est-elle surjective ?
- 4a. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}$ de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle famille.
- 4b. La famille $\mathcal{B}'$ forme-t-elle une nouvelle base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$?

EXERCICE 4.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui admet le polynôme $P = X^4 - 1$ pour polynôme annulateur. Prouver que f est un isomorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f .

EXERCICE 5.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (-y, x)$.

- a. Prouver que f est un endomorphisme, déterminer f^2 et en déduire un polynôme annulateur P .
- b. Montrer que f est bijective et expliciter $f^{-1}((x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- c. On oublie le 2a et le 2b ! Prouver par les méthodes classiques que f est un isomorphisme et retrouver l'expression de f^{-1} .

EXERCICE 6. Reprendre l'application linéaire f_5 de l'exercice 1 et déterminer $\text{Ker}(f_5)$ et $\text{Im}(f_5)$.

f_5 est-elle injective ? surjective ? est-elle un isomorphisme ?

EXERCICE 7. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et f l'application de E dans E qui à une suite u associe la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

1. Déterminer $f((2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $f((2n+1)_{n \in \mathbb{N}})$
2. Prouver que f est un endomorphisme
3. Déterminer son noyau. f est-elle injective ?

EXERCICE 8. Soit $f: \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \rightarrow & R \end{matrix}$ où R est le reste de P dans la division euclidienne par $X-1$

1a. Montrer que f est un endomorphisme

1b. Déterminer l'image par f de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2a. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$. f est-il injectif ?

2b. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$. f est-il surjectif ?

EXERCICE 9. *Un peu d'art abstrait...*

Soit E un ev et f un endomorphisme de E .

1a. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

1b. Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

2. Prouver que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

EXERCICE 10. Soit E un ev et f un endomorphisme de E .

1a. Mise en jambe : on suppose que f vérifie $f^2 - 3f + 2Id = 0$: à l'aide d'un raisonnement analyse-synthèse, montrer que $E = \text{Ker}(f - 2Id) \oplus \text{Ker}(f - Id)$.

1b. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1c. En déduire une expression de f^n en fonction de f , de Id et de $n \in \mathbb{N}$.

1d. Prouver que $\text{Im}(f - Id) \subset \text{Ker}(f - 2Id)$ et que $\text{Im}(f - 2Id) \subset \text{Ker}(f - Id)$.

2. Soit g un endomorphisme tel que $g^3 = g$: montrer que $E = \text{Ker}(g) \oplus \text{Ker}(g - Id) \oplus \text{Ker}(g + Id)$.

EXERCICE 11. D'après EML 2015.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$, soit W le polynôme $W = X(X - 4)$.

1. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que l'application $\phi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow E$ qui à un polynôme P associe le polynôme $\phi(P) = WP$ est un isomorphisme.

III. PROJECTEUR

EXERCICE 12. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, 0, 1))$.

1. Prouver que F et G sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le projeté sur G parallèlement à F d'un vecteur (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 13. Soit f un endomorphisme de l'év $\mathbb{R}^n$ et tel que $f^2 = \frac{1}{2}(f + Id)$. On suppose de plus que f n'est pas une homothétie.

1. Exprimer f^3 comme combinaison linéaire de Id et f .
2. Prouver que pour tout entier naturel n , il existe un couple (a_n, b_n) de réels tels que

$$f^n = a_n f + b_n Id \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$$

3. En déduire une expression en fonction de n de a_n et de b_n .
4. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n) .
5. Soit alors p l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}Id$: vérifier que p est un projecteur.