

Lois normales - Exercices

Loi normale centrée et réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Exercice 1

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $P(Z \leq 1,8) \approx 0,964$ et $P(Z \leq 2,3) \approx 0,989$. Calculer les probabilités suivantes :

1. $P(Z > 2,3)$
2. $P(-1,8 < Z < 2,3)$
3. $P(Z < -1,8)$
4. $P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3)$

Exercice 2

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Illustrer par un schéma :

1. $P(Z < 2)$
2. $P(-1 < Z < 2)$
3. $P(Z > -1)$
4. $P(Z < -1 \text{ ou } Z > 2)$

Exercice 3

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On définit par Φ , la fonction de répartition de X sur $\mathbb{R}$, par $\Phi(x) = P(X \leq x)$.

1. Montrer que pour tous nombres a, b réels $a < b$:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

2. Montrer que pour tout nombre réel x : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Exercice 4

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Calculer à l'aide de la table donnée en annexe :

1. $P(X \leq 1,5)$
2. $P(X \geq -1)$
3. $P(0,53 \leq X \leq 1,53)$
4. $P(-1 \leq X \leq 1)$
5. $P(-2 \leq X \leq 2)$
6. $P(-3 \leq X \leq 3)$

Exercice 5

La fonction de densité de la loi centrée réduite est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$
2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,2$ admet une unique solution x_0 sur $[0 ; 10]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

a. Exprimer $P(-1,96 < X < 1,96)$ à l'aide d'une intégrale.

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $P(-1,96 < X < 1,96)$ en utilisant la table donnée en annexe.

Exercice 6

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $\Phi(x) = P(X \leq x)$

1. Montrer que $P(-x \leq X \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.

2. En déduire que pour tout réel $x \in]0 ; 1[$, on a :

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

3. a. Pour $\alpha = 0,05$, quelle doit être la valeur de $\Phi(u_\alpha)$?

A l'aide de la table donnée en annexe, déterminer la valeur de u_α correspondante.

- b. Déterminer $u_{0,02}$ et $u_{0,005}$.

Exercice 7

On veut construire un algorithme permettant de déterminer le seuil u_α à 0,001 près.

On suppose que l'on dispose d'une instruction de type $Norm(a,b)$, qui renvoie

$P(X \in [a, b])$, lorsque X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette d'obtenir une valeur approchée de u_α à 0,001 près.

```
Variables
Début
    Entrer la valeur de  $\alpha$ 
    u prend la valeur 0
    p prend la valeur 0
    Tant que  $p < 1 - \alpha$ 
        p prend la valeur  $Norm(-u, u)$ 
        u prend la valeur _____
    Fin tant que
    Afficher _____
Fin
```

2. Modifier l'algorithme pour qu'il demande à l'utilisateur la précision souhaitée.

Exercice 8

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

« Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha \quad »$$

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = P(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt$$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée et réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x :

$$H(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$$

4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0; +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variation de H sur $[0; +\infty[$.
5. Démontrer le théorème énoncé.

EXERCICES - Loi normale générale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Exercice 9

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$; une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
On admet les propriétés suivantes :

$$E(aY+b) = aE(Y) + b \quad V(Y) = E((Y - E(Y))^2)$$

1. On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
 - a. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
 - b. Démontrer que $V(Z) = E(Z^2)$.
 - c. Exprimer X en fonction de Z .
2. En déduire $E(X) = \mu$.
3. En déduire $V(X) = \sigma^2$.

Exercice 10

Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance -4 et d'écart type 7.

Calculer avec trois décimales :

1. $P(X \leq 11)$
2. $P(-11 \leq X \leq 3)$
3. $P(X \leq -11 \text{ ou } X \geq 3)$
4. $P(-18 \leq X \leq 10)$
5. $P(X \leq -18 \text{ ou } X \geq 10)$
6. $P(X \leq -10 \text{ ou } X \geq 18)$

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire qui à chaque personne prélevée au hasard, associe sa taille en cm. On suppose que X suit une loi normale de moyenne 178 et d'écart type 10.

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près pour les probabilités et au centimètre près pour les longueurs.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 - (a) A : « une personne prélevée au hasard a une taille supérieure à 180 cm »,
 - (b) B : « une personne prélevée au hasard a une taille inférieure ou égale à 150 cm ».
 - (c) C : « une personne prélevée au hasard a une taille comprise entre 160 et 185 cm ».
2. (a) Déterminer le réel a tel que $P(X \geq a) = 0,80$. Interpréter le résultat.
(b) Déterminer le réel b tel que $P(176 - b \leq X \leq 180 + b) = 0,68$.
(c) Déterminer une estimation de la taille en dessous de laquelle se situe la moitié de la population.

Exercice 12

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(20, 16)$. Calculer à l'aide de la table donnée en annexe (les résultats seront arrondis à 10^{-3} près) :

1. $P(16 \leq X \leq 24)$
2. $P(X \geq 20)$
3. $P(X \leq 12)$
4. $P(X \leq 10 \text{ ou } X \geq 30)$

Exercice 13

Tous les résultats numériques seront donnés sous forme décimale et seront arrondis au dix millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres. Une bille est dite hors norme lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 10 et d'écart type 0,4.

Montrer qu'une valeur approchée à 0,0001 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124. On pourra s'aider des valeurs indiquées dans la table fournie en annexe.

Exercice 14

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1 = 36$ et d'écart type $\sigma_1 = 0,2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2 = 6$ et d'écart type $\sigma_2 = 0,05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si celle-ci est comprise entre $\mu_1 - 3\sigma_1$ et $\mu_1 + 3\sigma_1$. Quelle est la probabilité p_1 approchée à 10^{-3} près pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?
2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si celui-ci est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Quelle est la probabilité p_2 approchée à 10^{-3} près pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre ?
3. On prélève au hasard une pièce. On appelle L l'événement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'événement « la pièce est conforme pour le diamètre »
On suppose L et D indépendants.
 - a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard soit acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2} près).
 - b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2 .

Exercice 15

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $P(Z < 1) = 0,84$.
Déterminer sans calculatrice :

- | | |
|--|--|
| a. $P(X \leq 10)$ pour $X \sim \mathcal{N}(8, 4)$ | c. $P(X < 10)$ pour $X \sim \mathcal{N}(5, 25)$ |
| b. $P(X \geq 0)$ pour $X \sim \mathcal{N}(-5, 25)$ | d. $P(1 < X < 5)$ pour $X \sim \mathcal{N}(5, 16)$ |

Exercice 16

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(20, 4)$.

En utilisant la fonction **InvNormCD** ou **InvNorm** de la calculatrice :

1. Donner à 10^{-2} près, x tel que $P(X \leq x) = 0,9$
2. Donner à 10^{-2} près, x tel que $P(X \geq x) = 0,9$

Exercice 17

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Montrer que pour tout $\sigma > 0$, $P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right)$.
2. Donner le réel $x > 0$ à 10^{-3} près tel que $P(Z < x) = 0,8$.
3. En déduire la valeur de σ à 10^{-3} près telle que $P(X < 5) = 0,8$.

Exercice 18

Une production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race Française Frisonne Pis Noir peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X , de loi normale $\mu = 6000$ et d'écart type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction de densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au mieux son quota laitier, en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite disposer de certaines probabilités.
 - a. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres de lait par an.
 - b. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.
 - c. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an.
2. Dans son futur troupeau, l'éleveur souhaite connaître plusieurs productions :
 - a. Calculer la production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.
 - b. Calculer la production maximale prévisible des 20% de vaches les plus productives du troupeau.

Exercice 19

Une coopérative produit du beurre en micro plaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les micro plaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. On admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 micro plaquettes suit une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$.

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2g et 503,8g (soit environ $500 \pm 3\sigma$).

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h \leq X \leq \mu + h) = 0,95$
 - a. Soit $Z = \frac{X - 500}{\sqrt{1,6}}$. Quelle loi suit la variable Z ?
 - b. Montrer que $\mu - h \leq X \leq \mu + h$ équivaut à $\frac{X - h - 500}{\sqrt{1,6}} \leq Z \leq \frac{X + h - 500}{\sqrt{1,6}}$.
 - c. Donner une valeur de a telle que $P(-a \leq Z \leq a)$
 - d. Déterminer une valeur approchée des poids d'alerte.

EXERCICES - Théorème de Moivre - Laplace

Exercice 20

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(121; 0,5)$.

- Calculer à l'aide de la calculatrice $P\left(-2 \leq \frac{X-60,5}{5,5} \leq 2\right)$.
- Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et réduite.
Que vaut $P(-2 \leq Z \leq 2)$?
- Pourquoi ces quantités sont-elles proches ?

Exercice 21

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(81; 0,2)$.

- D'après le théorème de Moivre Laplace, à quelle intégrale est approximativement égale $P\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{X-16,2}{3,6} \leq \frac{3}{2}\right)$?
- Pourquoi peut-on raisonnablement accepter l'approximation précédente ?
- En déduire que : $P(14,4 \leq X \leq 21,6) \approx P\left(-\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right)$, où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- Utiliser l'approximation précédente pour calculer $P(14,4 \leq X \leq 21,6)$.
- Comparer avec la valeur de $P(14,4 \leq X \leq 21,6)$ fournie par la calculatrice.

Exercice 22

Une usine fabrique des balles de tennis. Un contrôle de qualité montre que 3% des balles produites ne sont pas conformes au cahier des charges de la fabrication. On prélève au hasard dans la production 300 balles. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 300 balles tirées, associe le nombre de balles non conformes. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 4 balles non conformes, puis au plus 4 balles non conformes.
- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X .
- Montrer que la loi de $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ peut être approchée par la loi normale centrée et réduite.
- En utilisant l'approximation précédente, calculer $P(X \leq 4)$, $P(X \leq 12)$ et $P(6 \leq X \leq 12)$.

Exercice 23

Une entreprise emploie 220 salariés. On admet que la probabilité pour qu'un employé soit absent une semaine donnée est égale à $p = 0,05$.

On suppose que la présence d'un employé ne dépend pas de la présence de ses collègues. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés absents une semaine donnée.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .
- Démontrer que l'on peut approcher la loi de la variable $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée et réduite, c'est-à-dire de paramètre 0 et 1.
- Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du réel x .

X	-1,55	-1,24	-0,93	-0,62	-0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
P(Z < x)	0,0606	0,1075	0,1762	0,2676	0,3783	0,5000	0,6217	0,7324	0,8238	0,8925	0,9394

Calculer au moyen de l'approximation de la question 2. une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absent dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice 24

Un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables fait une promotion sur un type d'appareil A. Dans une journée 150 personnes se présentent. La probabilité pour qu'une personne achète l'appareil A est de 0,4. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles A vendus en une journée.

- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
Calculer son espérance et son écart type.
- Montrer que la loi de $Z = \frac{X - 60}{6}$ peut être approchée par la loi normale centrée et réduite.
- En utilisant l'approximation précédente, calculer les probabilités suivantes à 10^{-4} près :
 $P(X \leq 72)$; $P(X \geq 69)$; $P(69 \leq X \leq 72)$

DEVOIR - BACCALAUREAT

Exercice 25

Pour chacune des questions suivantes, on indiquera si la proposition vraie ou fausse.

1. La durée de sommeil quotidienne d'un adulte est en moyenne de 7,5 heures. On évalue à 10% la proportion d'adultes qui dorment plus de 9h ou moins de 6h par jour.

On appelle S la variable aléatoire qui mesure la durée de sommeil quotidienne d'un adulte.

On suppose que S suit une loi normale.

Affirmation : Environ 45% des adultes dorment en moyenne entre 7h et 8h par jour.

2. Soit Y une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(9, \sigma^2)$. On note $t = P(10 \leq Y)$ et Z la variable aléatoire centrée réduite associée à Y .

Affirmation :
$$P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z \leq -\frac{1}{\sigma}\right) = 1 - 2t$$

3. 90% des cadres d'une grande entreprise appartiennent à la catégorie A . Le salaire annuel brut en euros des cadres de catégorie A peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 35 123 et d'écart type 4 287.

Les autres cadres appartiennent à la catégorie B . Le salaire annuel brut en euros des cadres de catégorie B peut être modélisé par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 51 325 et d'écart type 8 012.

On choisit au hasard un cadre de l'entreprise.

On constate que son salaire annuel brut en euros est inférieur à 40 000 euros.

Affirmation : La probabilité que ce cadre appartienne à la catégorie A est inférieure à 0,95.

Exercice 26 – Métropole Juin 2018

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

a. Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

3. On interroge un échantillon de 3 750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.

On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X - 1500}{30}$.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire Z peut être approchée par la loi normale centrée réduite.

En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1 450 et 1 550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.