

Fonction exponentielle - Exercices

Propriétés des fonctions exponentielles

Exercice 1

1. Donner la définition, l'ensemble de définition et la dérivée de $\exp(x)$.
2. Représenter $\exp(x)$ dans un repère orthonormal en indiquant les valeurs particulières.
3. Démontrer les formulations ou relations suivantes :
 - a. La fonction $\exp(x)$ est strictement croissante sur son ensemble de définition
 - b. $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
 - c. Démontrer l'unicité de la fonction $\exp(x)$.
 - d. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
 - e. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
 - f. $(\exp(x))^n = \exp(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$
4. Démontrer les limites suivantes :
 - a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) = +\infty$
 - b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$
 - c. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$
 - d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \right) = +\infty$
 - e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (e^x)^3 e^{-2x}$
2. $B = \frac{e^{2x+1}}{e^{-2x}}$
3. $C = \frac{e^{3x-1}}{e^{2-x}}$
4. $D = \sqrt{\frac{20e^{5x}}{5e^{-4x}}}$
5. $E = \sqrt{\frac{3e^{x-1}}{e^{2x+1}}}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(e^x)^3 = e^{x-1}$
2. $\frac{e^{-x}-3}{e^{-x}-5} = \frac{1}{2}$
3. $e^{6x} + 2e^{3x} - 3 = 0$
4. $e^x + e^{1-x} - (e+1) = 0$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^x < 1$
2. $e^{2x-1} > \sqrt{e}$
3. $\frac{2e^x-3}{e^x-3} < \frac{1}{2}$
4. $4e^{2x} < 3e^x + 1$
5. $e^x < e^{-x} + 1$

Exercice 5

Simplifier les expressions : a) $(e^x)^5 e^{-2x}$ b) $\frac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ c) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$

Exercice 6

Démontrer que pour tout réel x ,

- a) $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = e^x \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$
- b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$
- c) $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$
- d) $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x-1}{e^{2x}}$

Exercice 7

Résoudre les équations et inéquations :

• $(E_1) : e^x = 1$ • $(E_2) : e^{2x} = e$ • $(E_3) : e^x = e^{-x}$ • $(E_4) : e^{x^2} = (e^{-x})^2 e^3$ • $(E_5) : e^{2x+1} = e^{\frac{5}{2}}$
• $(I_1) : e^x > e$ • $(I_2) : e^{2x} \leq 1$ • $(I_3) : (e^x)^3 \leq \frac{1}{e}$ • $(I_4) : e^x - \frac{1}{e^x} > 0$ • $(I_5) : e^{x^2} \geq e^{-x-1}$

Exercice 7

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f(x) = e^{-3x} & \text{b) } g(x) = e^x + e^{-x} & \text{c) } h(x) = x + e^x & \text{d) } k(x) = e^{2x} + e^x + 1 \\ \text{e) } l(x) = e^{3x} - e^x & \text{f) } m(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + 2} & \text{g) } n(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^x} & \end{array}$$

Exercice 8

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 + 2 - e^x & \text{b) } g(x) = \frac{2e^x - x}{x^2} & \text{c) } h(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \\ \text{d) } l(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x & \text{e) } k(x) = \frac{\sqrt{e^x + 2}}{x} & \text{f) } t(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{x^2 + x - 3} \end{array}$$

Exercice 9

Etudier sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes (sens de variations et limites) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } f(x) = e^{-x} & \text{b) } g(x) = e^x + e^{-x} & \text{c) } h(x) = x + e^x & \text{d) } k(x) = e^{3x} - 3e^x \\ \text{e) } l(x) = e^{-x^2} & \text{f) } m(x) = (0,4x - 2)e^{-0,1x} & \text{g) } n(x) = (x + 1)^2 e^{-x} & \end{array}$$

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (E_1) : e^x = -4 & (E_4) : e^{(x^2)} \leq (e^x)^2 \\ (E_2) : (e^x - 3)^2 = 9 & (E_5) : (x + 2)(2e^x - 1) \geq 0. \\ (E_3) : \frac{e^{5x+3}}{e^{x-4}} \leq \frac{1}{e} & (E_6) : 2e^{2x} - e^x + 1 = 0. \end{array}$$

Exercice 11

Déterminer la dérivée de f .

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 3}; I = \mathbb{R}. & f_2(x) = e^{\frac{2x+1}{x+4}}; I = \mathbb{R}_+. \\ & f_3(x) = xe^{-x^2}; I = \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 12

Etudiez les limites à l'endroit indiqué.

$$\begin{array}{l} h_1(x) = \frac{e^{2x} - 1}{5x}; \text{ en } 0. \\ h_2(x) = e^{(x^2)} - e^{3x+4}; \text{ en } +\infty. \\ h_3(x) = (x + 1)e^{x+3}; \text{ en } -\infty \text{ et } +\infty. \end{array}$$

Exercice 13

Soit $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $D = \mathbb{R}^*$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de D et préciser les asymptotes éventuelles.
2. Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

Exercice 14

1) Prérequis : On admettra que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}$

- 2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- 3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

Exercice 15

On justifiera chaque étape des résolutions suivantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$$\text{a) } e^{x^2-5} = e^{-4x} \qquad \text{b) } e^{x+1} \times e^{3x+5} = 1$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $e^{7-3x^2} > e^{2-2x}$

Exercice 16

Déterminer les limites suivantes en mettant en évidence les limites de référence utilisées.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3xe^{-x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^x & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2x} \end{array}$$

Exercice 17

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g et h suivantes :

a) $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$ b) $g(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2}$ c) $h(x) = \frac{3e^x}{e^x - 2}$

Exercice 18

- 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
Montrer que pour tout réel x : $f(x) \geq 1$.
- 2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- 3) En faisant un changement de variable astucieux démontrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Exercice 19

- 1) Simplifier l'expression suivante : $\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :
 - a) $e^{2x+1} - 1 = 0$
 - b) $\frac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2$

Exercice 20

On suppose connu le résultat suivant : pour tout réel x , on a $e^x > x$

- 1) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 1$.
- 2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
- 3) Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.
 - a) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b) Étudier les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.

Problèmes de synthèse

Exercice 21

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

1) Étude d'une fonction auxiliaire

- a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$.
Étudier le sens de variation de la fonction g et déterminer la limite de g en $+\infty$. On dressera le tableau de variation.
- b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0 ; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
- c) Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}
- d) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0 ; +\infty[$.

2) Étude de la fonction f

- a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
- c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel : $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$.
- e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 22

Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-kx}}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée en **annexe**, à rendre avec la copie.

- 1) Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- 3) On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathcal{C}_{-1}$ d'abscisse x . On note K le milieu du segment [MP].

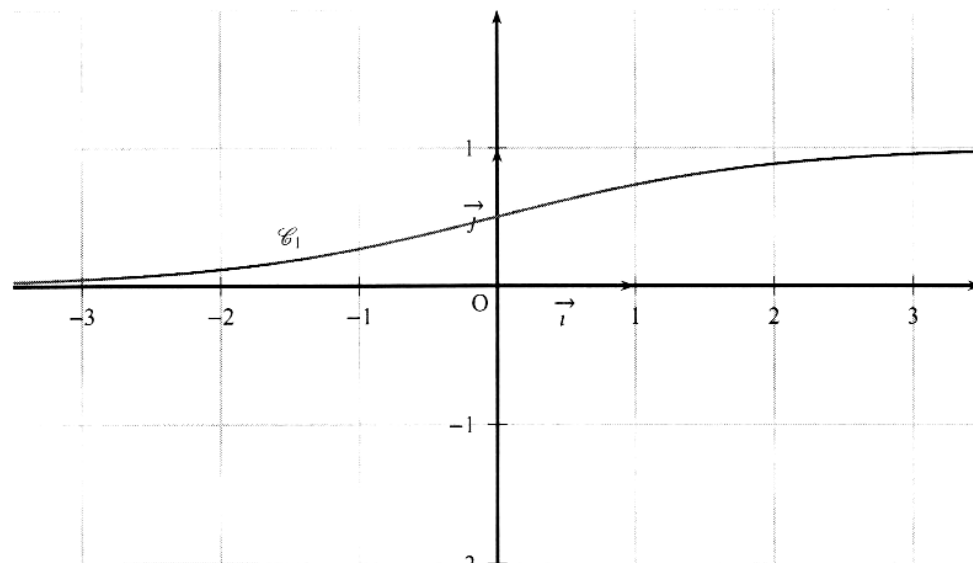
- 1) Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- 2) En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_1$?
- 3) Tracer soigneusement la courbe $\mathcal{C}_{-1}$ sur l'**annexe**, à rendre avec la copie.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- 1) Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.
- 2) Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.
- 3) Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.



Exercice 23

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe à rendre avec la copie.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b .

- 1) a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
c) En déduire que $b = -a$.
- 2) Démontrer que le réel a est solution de l'équation : $2(x - 1)e^x + 1 = 0$

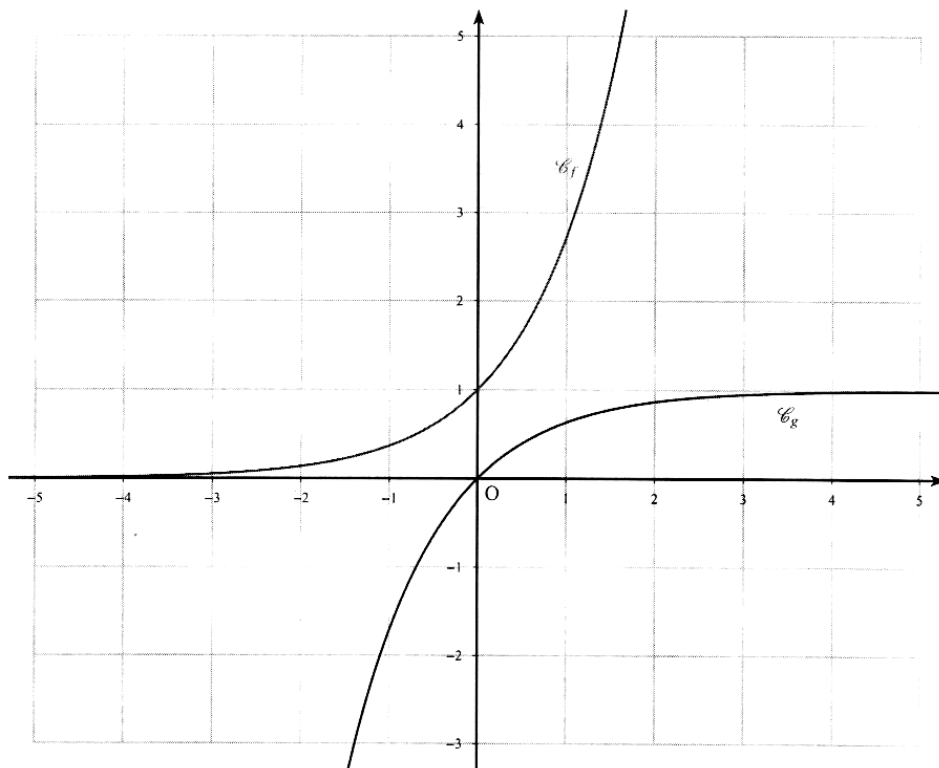
Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$

- 1) a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
- 2) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

Donner une valeur approchée de $\varphi(-2)$ et $\varphi(1)$.

À l'aide de l'algorithme par dichotomie, donner un encadrement de α et β à 10^{-3} .
On donnera le nombre de boucles nécessaires à ces encadrements.



Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x-1} + 1$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

- 1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
- 2) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- 3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
- 4) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe C au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

- 1) On appelle T_a la tangente à C au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
- 2) Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

- 3) Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

- 4) Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Exercice 25

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$

- 1) Étudier les variations de la fonction g .
- 2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.

2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{2 + e^{\frac{x}{4}}}$

1) Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{x}{4}}}$

2) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

3) Étudier les variations de f .

Exercice 27

A - Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

C - Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $C_{-1} = C$.

1. (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

(b) Déterminer les points d'intersection des courbes C_0 et C_1 .

Vérifier que, pour tout entier k , ces points appartiennent à la courbe C_k .

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.

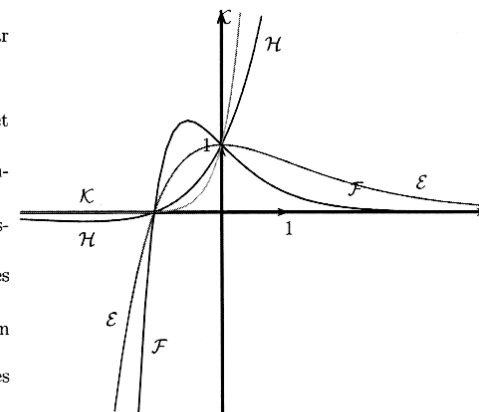
En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes C_k et C_{k+1} .

3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k . (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers -1 , -3 , 1 et 2 .

Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Exercice 28

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g , sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

1. a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.

b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.

c) En déduire que $b = -a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x-1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1.$$

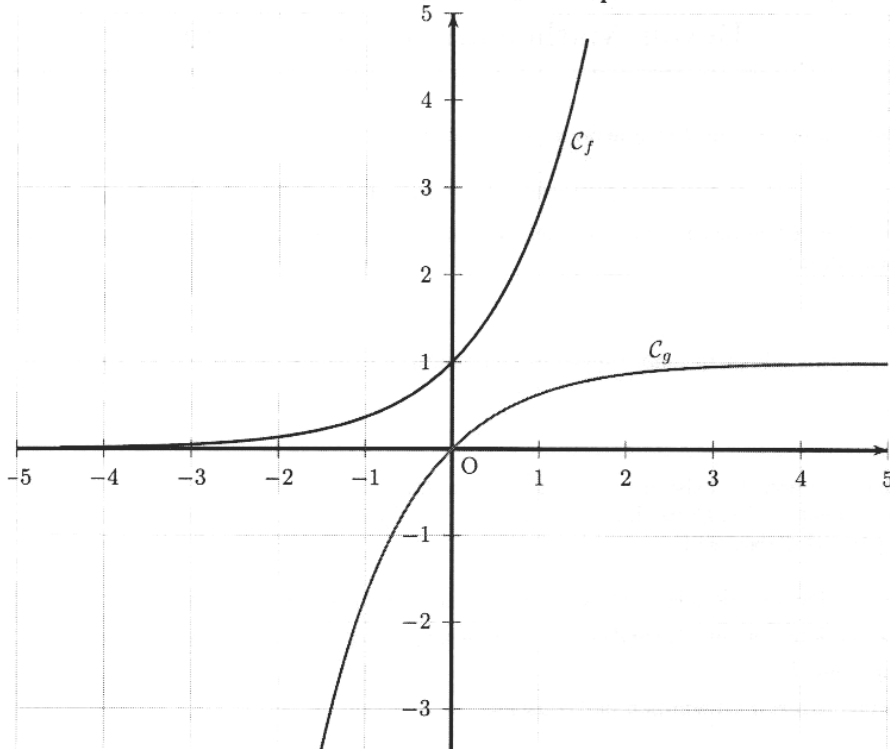
1. a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.
On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Annexe à rendre avec la copie

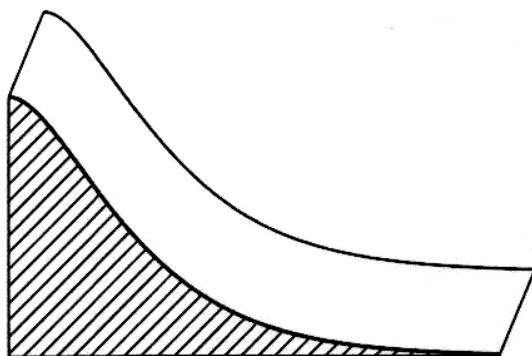


Annales baccalauréat

Exercice 29 Polynésie – 12 Juin 2015

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

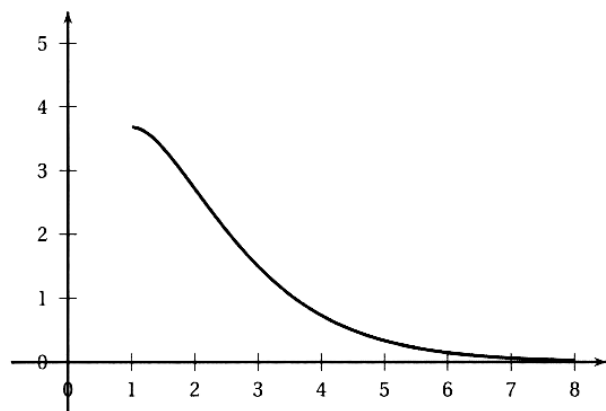


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



- On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.

Déterminer la valeur de l'entier b .

- On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.

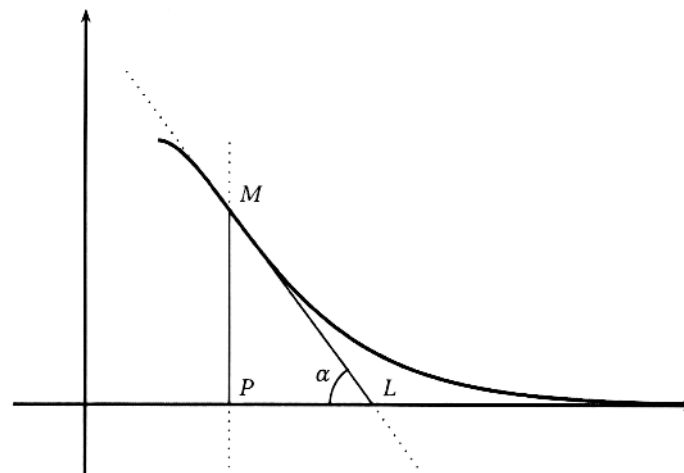
Déterminer la valeur de l'entier a .

Partie B Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

- On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1; 8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1; 8]$, $f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}$. Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1; 8]$.
- Soit x un réel de l'intervalle $]1; 8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan \alpha = |f'(x)|$.
- Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées?

Exercice 30 Amérique du Nord – 30 Mai 2014

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

- Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- La courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathcal{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
- On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.
- Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera.
En donner une interprétation graphique.

Exercice 31 Polynésie – 13 Juin 2014

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

- Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
- Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
 - Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

- Justifier que, pour tout réel x , $h(x) = x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$.

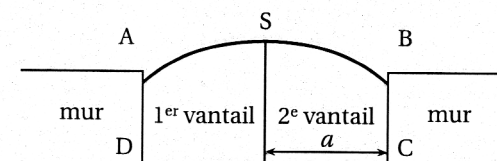
En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

- On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
 - Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
- Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$
 - Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$.
 - Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
 - Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 32 Amérique du Nord – 02 Juin 2017

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leq 2$.

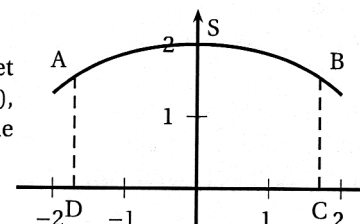
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires au seuil $[CD]$ du portail. Entre les points A et B , le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a; f(-a))$, $(a; f(a))$, $(a; 0)$ et $(-a; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f , comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b .

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b .

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2} . Que décide le client?

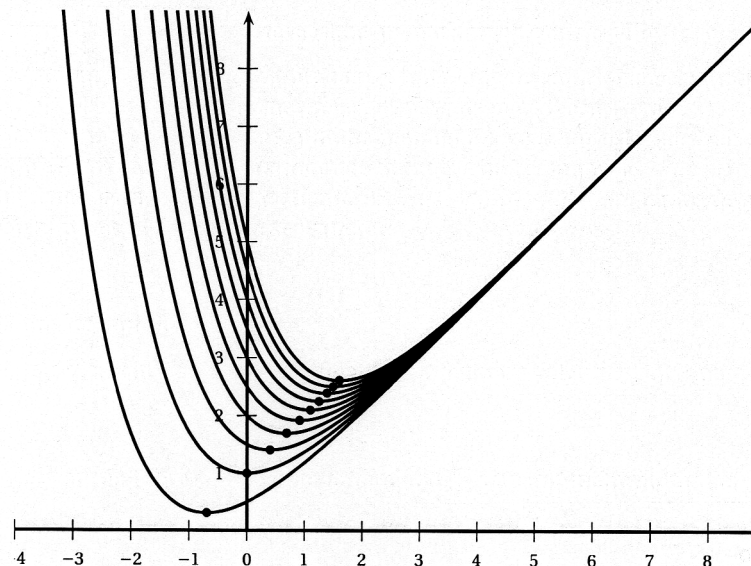
Exercice 33 Liban – 05 Juin 2017

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère ortho-normé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés. Est-ce le cas?

Exercice 34 Polynésie – 14 Juin 2017

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1} , de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t , $v(t) = 9,81 \frac{m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Cas général

- Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.
- La goutte ralentit-elle au cours de sa chute?
- Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81 \frac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
- Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\frac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.

À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-1} .

- Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage? Arrondir la réponse au dixième de seconde.
- En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1} .

Exercice 35 Asie- 22 Juin 2017

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{80}t} \right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micro-mole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{7}{80}t} \right).$$

- Étudier le sens de variation de la fonction C sur $]0; +\infty[$.
- Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace?

Partie B : étude de fonctions

- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x} \left(1 - e^{-\frac{3}{40}x} \right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

- On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

- Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 80]$.

En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{105}t} \right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

- a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
- b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.

Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Exercice 36 Polynésie – 05 septembre 2017

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.

On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.

Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que

$$N(t) = N_0 e^{at}.$$

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.

En déduire la valeur du paramètre a .

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t \geq 0$,

$$N(t) N_0 e^{0,05t}.$$

La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules. Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer. Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.

En l'absence de suivi médical, au bout de combien de temps la tumeur pourrait-elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récurrence, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en $\mu\text{mol.L}^{-1}$, peut être modélisée en fonction du temps t , exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par

$$c(t) = \frac{D}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{80}t} \right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D .

1. Détermination de la clairance

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur $112 \mu\text{mol.h}^{-1}$; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à $6,8 \mu\text{mol.L}^{-1}$.

- a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation

$$112 \left(1 - e^{-\frac{3}{40}k} \right) - 6,8k = 0.$$

- b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

- a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k .
- b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ .

Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de $16 \mu\text{mol.L}^{-1}$.

En déduire le débit D , à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de $5,85 \text{ L.h}^{-1}$.

Exercice 37 Antilles-Guyane – 18 Juin 2019

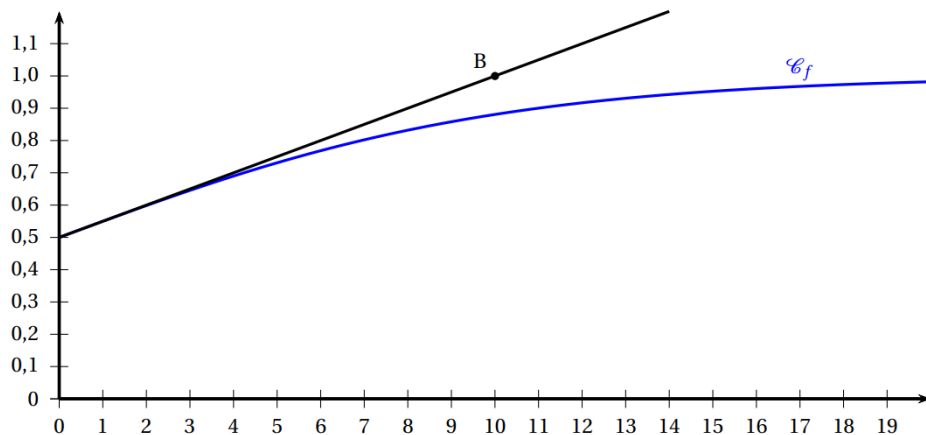
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe C_f passe par le point $A(0; 0,5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10; 1)$.



1. Justifier que $a = 1$. On obtient alors, pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$

$$f'(x) = \frac{b e^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b .

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. a. Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0 ; +\infty[$.
- b. Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
- c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.

Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.