



Fichier extrait du document [2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)

Informations générales

Type : [Devoirs Surveillés](#)

Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)

Matières : [Mathématiques](#)

Mots clés : lois finies, application linéaire, séries

Les fichiers du [document 1706](#)

- 2020-2021 DS09 - Mai #doc 1706

Le contributeur **pinel** précise : Tout juste de retour de confinement, et un DS ! Extrait
Edhec E 2020 essentiellement

Derniers docs de CPGE ECS 1

- [C Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [C 2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- [? Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [C 2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- [? Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- [? ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1706



revisermonconcours.fr

Durée : 3h

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE 01

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

■ On considère une matrice A fixée de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $A_n(\mathbb{R})$ associe la matrice :

$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2. Montrer que f est un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

■ Dans toute la suite de l'exercice, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3a. Proposer un algorithme qui permette d'effectuer le calcul matriciel ${}^tAJ + JA$.

3b. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une base de $A_3(\mathbb{R})$.

4a. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

4b. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

5. Déterminer la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$.

EXERCICE 02

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .

■ On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance. 3. Soit k un élément de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

3a. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y lorsque la boule n° k a été piochée dans l'urne U .

```
function Y = urneV(k)
    Y = 0
    for i=1 : ...
        if (rand()<...) then
            Y = Y+1
        end
    end
endfunction
```

3b. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

4. A l'aide de l'instruction `grand`, compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

```
n = input('entrez la valeur de n: ')
p = input('entrez la valeur de p: ')
X = ...
Y = ...
```

5a. Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0; n \rrbracket$, puis montrer à l'aide d'un système complet d'événements bien choisi que

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

5b. Écrire, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6a. Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

6b. Prouver ensuite que

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

6c. En déduire que

$$E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$$

EXERCICE 03

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln n$.

1a. Montrer que pour tout entier k non nul,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

1b. En sommant ces inégalités, montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln n + 1$$

1c. En déduire un équivalent de v_n .

2a. Montrer à l'aide du 1a que pour tout entier naturel non nul, $w_n - w_{n+1} \geq 0$.

2b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

2c. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.

3a. Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.

3b. En déduire que la suite $(w_n)_n$ converge. On note γ sa limite.

EXERCICE 1 – D'APRES EDHEC E 2020

On note tB la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Utilisons la méthode structurale :

- $A_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$ par définition de $A_n(\mathbb{R})$, et $M_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de référence.
- $A_n(\mathbb{R})$ est non vide puisque la matrice nulle est antisymétrique. Elle vérifie bien ${}^tM = -M$ ($= 0$ dans les deux cas).
- Soit A et B deux matrices de $A_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} {}^t(A + \lambda B) &= {}^tA + \lambda {}^tB \text{ puisque la transposition est un app. linéaire} \\ &= -A - \lambda B \text{ puisque } A \text{ et } B \text{ sont antisymétriques} \\ &= -(A + \lambda B) \end{aligned}$$

Ainsi $A_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

■ On considère une matrice A fixée de $M_n(\mathbb{R})$ et l'application f , qui à toute matrice M de $A_n(\mathbb{R})$ associe la matrice :

$$f(M) = {}^tAM + MA$$

2. Montrer que f est un endomorphisme de $A_n(\mathbb{R})$.

- Montrons que f est un morphisme.

Soit M et M' deux matrices de $A_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(M + \lambda M') &= {}^tA(M + \lambda M') + (M + \lambda M')A. \\ \text{Développons : } f(M + \lambda M') &= {}^tAM + MA + \lambda({}^tAM' + M'A) \\ &= f(M) + \lambda f(M') \end{aligned}$$

f est bien linéaire.

- Montrons maintenant que $f: A_n(\mathbb{R}) \rightarrow A_n(\mathbb{R})$ c-à-d que $\forall M \in A_n(\mathbb{R}), f(M) \in A_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$, déterminons la transposée de la matrice $f(M)$.

$${}^tf(M) = {}^t({}^tAM + MA) = {}^t({}^tAM) + {}^t(MA) \text{ par linéarité de la transposition}$$

Mais on sait que :

- ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$ pour toutes matrices A et B .
- ${}^t({}^tA) = A$ pour toute matrice A .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} {}^tf(M) &= {}^t(M) {}^t({}^tA) + {}^t(A) {}^tM = -MA + {}^tA(-M) \text{ puisque } M \in A_n(\mathbb{R}) \\ &= -(MA + {}^tAM) = -f(M) \end{aligned}$$

$f(M)$ est bien une matrice antisymétrique et donc f est un endomorphisme.

■ Dans toute la suite de l'exercice, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3a. Proposer un algorithme qui permette d'effectuer le calcul matriciel ${}^tAJ + JA$.

$$A = [0 \ 0 \ 1; 0 \ -1 \ 0; 0 \ 0 \ 0]$$

$$J = [0 \ 1 \ 0; -1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0]$$

$$A' * J + J * A$$

3b. Prouver que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une base de $A_3(\mathbb{R})$.

Montrons que cette famille est une famille libre et génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.

- On remarque avant tout que chacune de ces matrices est une matrice antisymétrique donc appartient à $A_3(\mathbb{R})$.
- De plus cette famille est libre, puisque à coordonnées échelonnées.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$:

$$M \in A_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tM = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -a \\ e = -e \\ i = -i \\ b = -d \\ c = -g \\ f = -h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \\ i = 0 \\ b = -d \\ c = -g \\ f = -h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & d & g \\ -d & 0 & h \\ -g & -h & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = dJ + gK + hL \text{ où } d, g, h \text{ sont 3 réels}$$

$$\Leftrightarrow M \in \text{vect}(J, K, L)$$

Cette famille est bien génératrice de $A_3(\mathbb{R})$.

4a. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$. $\mathcal{B}$ étant une base de $A_3(\mathbb{R})$, $\text{Im}(f)$ est générée par :

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(f(J), f(K), f(L))$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(J) &= {}^tAJ + JA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -J - K \end{aligned}$$

Ainsi $f(J) = -J - K$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(K) &= {}^tAK + KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \\ \bullet \quad f(L) &= {}^tAL + LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -L \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(-J - K, -L) = \text{vect}(J + K, L)$$

De plus ces deux vecteurs sont libres (à coordonnées échelonnées) donc la famille $(J + K, L)$ constitue une base de $\text{Im}(f)$.

4b. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.

- D'après le théorème du rang,

$$\dim(A_3(\mathbb{R})) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f)$$

D'après Q3, $\dim(A_3(\mathbb{R})) = 3$.

D'après Q4a, $\text{rang}(f) = 2$.

Par conséquent, $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

- Or en 4a nous avons vu que $f(K) = 0$ donc $K \in \text{Ker}(f)$ et celui-ci étant de dimension 1,
 $\text{Ker}(f) = \text{vect}(K)$.

5. Déterminer la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. D'après les calculs précédents,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(J) & f(K) & f(L) \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} J \\ K \\ L \end{matrix}$$

EXERCICE 2 – D'APRES EDHEC E 2020

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaitre la loi de Y .

- Dans le cas où $n=1$, X ne prend que la valeur 1 puisque l'urne U contient une seule boule qui est blanche.
- On pioche donc une boule dans l'urne V , boule qui a une probabilité p d'être blanche.
- Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p , et 0 avec la probabilité $1-p$.
Autrement dit, lorsque $n=1$, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

■ On revient au cas général.

2. Reconnaitre la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Vu que l'on pioche une boule parmi n boules indiscernables numérotées de 1 à n , X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([1; n])$.

On sait alors que

$$E(X) = \frac{1+n}{2} ; V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

3. Soit k un élément de $[1; n]$.

3a. 0. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Y lorsque la boule n° k a été piochée dans l'urne U .

```
function Y = urneV(k)
    Y = 0
    for i=1 : k          // on fait k tirages
        if (rand() < p) then // (rand() < p) est un évt de proba p, la proportion de blanches dans V
            Y = Y+1
        end
    end
end
endfunction
```

3b. Déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$.

Plaçons-nous sous la condition $(X = k)$, c'est-à-dire supposons que la boule n° k a été piochée dans l'urne U .

k boules vont donc être piochées dans l'urne V , successivement avec remise après chaque boule tirée.

- Lorsque $i > k$, l'événement $(Y = i)$ ne peut être réalisé.
En effet, on ne peut piocher i boules blanches dans l'urne V puisqu'on va piocher $k < i$ boules dans cette urne.
Ainsi, pour $k < i$

$$P_{(X=k)}(Y = i) = 0$$

- Lorsque $0 \leq i \leq k$, $(Y = i)$ peut être vu comme la réalisation de i succès lors de la répétition de k épreuves identiques et indépendantes (les k tirages avec remise).
En fait, la loi de Y conditionnée par $(X = k)$ est une loi Binomiale de paramètre k (nb de répétitions) et p (proba d'un succès, c'est-à-dire du tirage d'une blanche).
Ainsi, pour $0 \leq i \leq k$,

$$P_{(X=k)}(Y = i) = \binom{k}{i} p^i q^{k-i}$$

4. A l'aide de l'instruction `grand`, Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y .

On rappelle les commandes Scilab suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

`grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$

`grand(1,1,'bin',n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p

On a :

```
n = input('entrez la valeur de n:')
p = input('entrez la valeur de p: ')
X = grand(1,1,'uin',1,n)
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
```

5a. Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\llbracket 0; n \rrbracket$, puis montrer à l'aide d'un système complet d'événements bien choisi que : $P(Y = 0) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$.

- Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k , pour tout $1 \leq k \leq n$.
Donc si l'événement $(X = n)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à n et $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.
- L'événement $(Y = 0)$ signifie que l'on a pioché aucune boule blanche dans l'urne V .
La famille $(X = k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ forme un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales donne alors

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^n P_{(X=k)}(Y = 0) \times P(X = k) = \sum_{k=1}^n \underbrace{P_{(X=k)}(Y = 0)}_{\text{voir Q3b}} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q^k \\ &= \frac{1}{n} \times q \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)} \end{aligned}$$

5b. Écrire, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier. Toujours d'après le même SCE,

$$\begin{aligned} P(Y = i) &= \sum_{k=1}^n P_{(X=k)}(Y = i) \times P(X = k) = \sum_{k=1}^n \underbrace{P_{(X=k)}(Y = i)}_{\text{voir Q3b}} \times \underbrace{P(X = k)}_{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \end{aligned}$$

6a. Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$. Avec les conditions données,

$$\begin{aligned} i \binom{k}{i} &= \frac{i \cdot k!}{i! (k-i)!} = \frac{i \cdot k (k-1)!}{i (i-1)! (k-i)!} \\ &= k \frac{(k-1)!}{(i-1)! (k-i)!} = k \binom{k-1}{i-1} \end{aligned}$$

6b. Prouver ensuite que $E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$. Rappelons que $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$. On a alors,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=0}^n i \times P(Y = i) = \sum_{i=1}^n i \times P(Y = i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(i \times \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \text{ d'après le 5b} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n i \times \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \right) \text{ par linéarité} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \text{ d'après le 6a} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \text{ par interversion des sommes doubles (attention aux bornes)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \end{aligned}$$

6c. En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$.

Faisons comme changement d'indice $s = i - 1$ dans la somme à « l'intérieur » :

$$\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = p \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k-1}{s} p^s q^{k-1-s}$$

D'après la formule du binôme de Newton on a alors :

$$\sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} = p(p+q)^{k-1} = p \text{ puisque } p+q=1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k \times p) \\ &= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{p(n+1)}{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 3

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $w_n = v_n - \ln n$.

1a. Montrer que pour tout entier k non nul, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$. Une manière de faire :

Pour tout $0 < k \leq t \leq k+1$ on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ et par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

1b. En sommant ces inégalités, montrer que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq v_n \leq \ln n + 1.$$

Sommons ces inégalités de $k = 1$ à $k = n-1$, il vient :

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}}_{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}} &\leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt}_{\int_1^n \frac{1}{t} dt} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}}_{v_n - \frac{1}{n}} \\ v_n - 1 &\leq \ln n \leq v_n - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Et par conséquent,

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1 + \ln n$$

1c. En déduire un équivalent de v_n . Ainsi, pour n assez grand,

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient que $\frac{v_n}{\ln n}$ tend vers 1 et donc que $v_n \sim \ln n$

2a. Montrer à l'aide du 1a que pour tout entier naturel non nul, $w_n - w_{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned} w_n - w_{n+1} &= v_n - \ln(n) - v_{n+1} + \ln(n+1) \\ &= \underbrace{v_n - v_{n+1}}_{-\frac{1}{n+1}} + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Or, d'après le 1a pour $k = n$ on trouve que

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

Et donc, $\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} \geq 0$.

D'où $w_n - w_{n+1} \geq 0$.

2b. Déterminer le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \frac{x}{1+x} &= x \left(\frac{1}{1+x} \right) = x(1-x+o(x)) = x - x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

Par somme :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2c. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$.

D'après le Q2b, au voisinage de 0

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \sim \frac{x^2}{2}$$

D'après Q2a,

$$w_n - w_{n+1} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

En posant $x = \frac{1}{n}$ qui est voisin de 0 lorsque n est voisin de l'infini, on trouve que

$$w_n - w_{n+1} = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \sim \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2n^2}$$

3a. Montrer que la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente.

- $\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente
- D'après le critère sur les équivalents de séries à terme positif, la série de terme général $w_n - w_{n+1}$ est convergente

3b. En déduire que la suite $(w_n)_n$ converge. On note γ sa limite.

La suite des sommes partielles de terme général $S_N = \sum_{k=1}^N (w_k - w_{k+1})$ est donc convergente vers un réel L .

Or par télescopage, $S_N = w_1 - w_{N+1}$ et donc $w_{N+1} = w_1 - S_N$ converge également, vers $w_1 - L$ que l'on note γ .