



Fichier extrait du document [2019-2020 DS05 de Janvier, et corrigé](#)

Informations générales

Type : [Devoirs Surveillés](#)

Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)

Matières : [Mathématiques](#)

Mots clés : fonction, suite implicite, matrice,
espace vectoriel, polynômes, suites

Les fichiers du [document 1693](#)

- 2019-2020 DS05 - Janvier #doc 1693

Derniers docs de CPGE ECS 1

- [C Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [C 2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- [? Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [C 2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- [? Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [C 2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- [? ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1693



revisermonconcours.fr

DS 05 – ECS1

Durée : 4h

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE 01 – LE COURS**Analyse**

1. Déterminer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x - 5)}{x - 2} \quad B = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right)$$

2. Étudier la continuité et dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x > 1 \\ x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

3. La fonction g suivante est-elle un élément de $C^1(\mathbb{R}^+)$?

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

4. Prouver, par dérivation, que pour tout réel $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Algèbre

5. Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible, avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

6. Déterminer l'inverse de la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dénombrement

7. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout réel x , déterminer

$$T_n(x) = \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k} x^k$$

8. On considère une course de 10 participants numérotés.

Un podium est la donnée des 3 premiers concurrents, dans l'ordre.

8a. Déterminer le nombre de podiums différents ?

8b. Déterminer le nombre de podiums différents sans les concurrents 1, 2 et 3 ?

8c. Déterminer le nombre de podiums différents avec les concurrents 1 et 2 ?

8d. Reprendre l'exercice en supposant qu'un podium est la donnée des 3 premiers concurrents, dans l'ordre ou le désordre.

EXERCICE 02

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1a. Déterminer pour tout réel x , $f'_n(x)$ et montrer que $f''_n(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

1b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$.

2b. Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ de $\mathcal{C}_n$.

2c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 0.

3a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .

3b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.

3c. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3d. Déterminer enfin la limite de la suite $(nu_n)_n$.

EXERCICE 03

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MD = DM\}$.

1. En écrivant M sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base.

2. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$.

2a. Montrer qu'il n'existe pas de matrice M diagonale solution de cette équation.

2b. Montrer que si M est solution de cette équation alors $M \in E$.

3. La réciproque à la question 2b est-elle vraie ?

Partie 2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid 2XP(X) = (X^2 - 1)P'(X)\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Le but est maintenant de déterminer les éléments de E .

Analyse du problème : on considère P un élément non nul de E .

2a. Montrer que 1 et -1 sont racines de P .

2b. En posant $n = \deg(P)$ et en identifiant les coefficients dominants, montrer que $n = 2$.

2c. En déduire une expression générale de P .

Synthèse : vérifier réciproquement que les polynômes de la forme obtenue en 2c sont dans E .

3. En déduire une base de E .

Dans cet exercice, on s'intéresse à la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad u_1 = -\frac{1}{3} \quad (E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1. Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ de terme général $w_n = (-1)^n \frac{n}{3}$.

Montrer que cette suite vérifie la relation de récurrence (E) .

2. Soit y la suite définie par le terme général $y_n = u_n - w_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$.

2b. En déduire une expression générale du terme général de la suite y .

2c. En déduire une expression générale du terme général de la suite u .

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

3a. A l'aide de la relation (E) écrite avec $n = k - 1$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{k=n+1} (u_{k+1} - u_k) - \sum_{j=0}^{k=n} (-1)^j \right)$$

3b. En déduire une expression explicite de S_n . Cette suite admet-elle une limite ?

ELEMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 01

1. Déterminer les limites suivantes : $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{x-2}$

On cherche X tel que $1 + X = 3x - 5$: on pose alors $X = 3x - 6$ ssi $x = \frac{X}{3} + 2$

- $\frac{\ln(3x-5)}{x-2} = \frac{\ln(1+X)}{\frac{X}{3}} = 3 \times \frac{\ln(1+X)}{X}$ où la nouvelle variable X tend vers 0 quand x tend vers 2
- Comme $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, on trouve $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3x-5)}{x-2} = 3$.

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right)$$

Posons $X = \frac{2}{x}$ ssi $x = \frac{2}{X}$:

- $x^2 \left(\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right) = \frac{4}{X^2} (\cos(X) - 1) = -4 \times \frac{1 - \cos X}{X^2}$ où la nouvelle variable X tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$
- Comme $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - \cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$, on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \right) = -2$.

2. Étudier la continuité et dérivabilité de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x > 1 \\ x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$.

- Les fonctions $x \rightarrow \ln(x^2)$ et $x \rightarrow x - 1$ sont continues et dérivables respectivement sur $]1; +\infty[$ et sur $[1; +\infty[$ donc la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
- Continuité en 1 :

- à gauche de 1, pas de problème comme dit précédemment.

- à droite de 1 : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x^2) = \ln 1 = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

La fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$.

- Dérivabilité en 1 :

- A gauche de 1 : pas de problème comme vu précédemment, et on a $f'_g(1) = 1$ (la dérivée de $x \rightarrow x - 1$ évaluée en 1)

- A droite de 1 : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\ln(x^2)}{x-1} = 2 \frac{\ln x}{x-1} = 2 \frac{\ln(1+X)}{X}$ où on a posé $X = x - 1$ qui tend vers 0 quand x tend vers 1.

Par limite de référence, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2 \times 1$ et on obtient $f'_d(1) = 2$

La fonction est donc dérivable à gauche et à droite de 1, mais pas en 1.

3. La fonction g suivante est-elle un élément de $C^1(\mathbb{R}^+)$: $g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Focalisons-nous sur le point de recollement (zéro), puisqu'il n'y a aucun souci sur $\mathbb{R}_*^+$.

- Continuité en 0 :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$: la fonction est continue en 0

- Dérivabilité en 0

- $\frac{f(x)-f(0)}{x} = x \ln x$ qui tend vers 0 par croissances comparées. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, la fonction est dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$.

- Continuité de la fonction dérivée en 0 :

Pour $x > 0$, on a $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$ qui tend vers 0 en 0, donc f est bien C^1 en 0 donc sur $\mathbb{R}^+$.

4. Prouver, par dérivation, que pour tout réel $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Soit $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$: f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

Rappelons que $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ et donc $\left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{x^2+1}$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0$: la dérivée est nulle sur l'intervalle $]0; +\infty[$, donc f est constante. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = C$ pour tout $x > 0$.

En évaluant par exemple en $x = 1$, comme $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on obtient le résultat voulu.

5. Déterminer les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

On a $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}$. Utilisons le déterminant :

$$\det(A - \lambda I_2) = (-1-\lambda)(-4-\lambda) - 4 = \lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda + 5)$$

La matrice $A - \lambda I_2$ est donc inversible pour tout réel $\lambda \notin \{0; -5\}$

6. Déterminer l'inverse de la matrice B définie par $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A l'aide de la méthode de réduction de Gauss-Jordan, on obtient que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dénombrement

7. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ et tout réel x , déterminer $T_n(x) = \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k} x^k$

Méthode 1 : Vu que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ on obtient $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ et donc

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^n n \binom{n-1}{k-1} x^k.$$

Par linéarité de la somme, $S_n(x) = n \sum_{k=2}^n \binom{n-1}{k-1} x^k$.

Posons alors $p = k - 1$: $S_n(x) = n \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^{p+1}$: rappelons que d'après la formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, essayons de nous y ramener.

On a :

$$S_n(x) = nx \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p = nx \left(\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p - 1 \right) = nx((1+x)^{n-1} - 1).$$

Méthode 2 :

Considérons le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$: en dérivant le polynôme on obtient

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Reste à multiplier par x :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1}$$

Puis à enlever le premier terme puisque la somme cherché S_n commence à $k = 2$:

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^n k \binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1} - nx.$$

8. On considère une course de 10 participants numérotés.

Un podium est la donnée des 3 premiers concurrents, dans l'ordre.

8a. Déterminer le nombre de podiums différents ? Il s'agit de déterminer le nombre de 3-listes de coordonnées 2 à 2 distinctes parmi les 10 participants, c'est le nombre de 3-arrangement de ces 10 éléments. Il y en a donc $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8$.

8b. Déterminer le nombre de podiums différents sans les concurrents 1, 2 et 3 ? Comme dans le 8a, mais avec 7 participants : il y en a $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

8c. Déterminer le nombre de podiums différents avec les concurrents 1 et 2 ? Il reste 8 choix pour le dernier cheval, et il y a 3! façons d'ordonner ces 3 chevaux. Réponse : $8 \times 3!$

8d. Reprendre l'exercice en supposant qu'un podium est la donnée des 3 premiers concurrents, dans l'ordre ou le désordre.

8a. Il y a $\binom{10}{3}$ podiums, ordre ou désordre.

8b. Il y en a $\binom{7}{3}$ sans les concurrents 1, 2 et 3.

8c. Il y en a $\binom{8}{1}$ avec les concurrents 1 et 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1a. Déterminer pour tout réel x , $f'_n(x)$ et montrer que $f''_n(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

- $f'_n(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n$
- $f''_n(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)(-e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x[-(1+e^x)+2e^x]}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x[e^x-1]}{(1+e^x)^3}$

Comme pour tout réel x on a $\frac{e^x}{(1+e^x)^3} > 0$, on obtient le résultat.

1b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $e^x - 1 > 0$ ssi $x > 0$, on obtient,

x	$-\infty$	0	1
f''_n	-	0	+
f'_n	$\searrow$ $n - \frac{1}{4}$ $\nearrow$		

Mais $n \geq 1$ donc $n - \frac{1}{4} > 0$ et f'_n est minorée par 0 donc positive strictement.

La fonction f_n est donc strictement croissante sur son domaine.

2a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$. Par opération sur les limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$.

2b. Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ de $\mathcal{C}_n$.

- $f_n(x) - nx = \frac{1}{1+e^x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ par quotient, et la droite (D_n) d'équation $y = nx$ est asymptote de $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$
- $f_n(x) - (nx + 1) = \frac{-e^x}{1+e^x}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = 0$ par quotient, et la droite (D'_n) d'éq. $y = nx + 1$ est asymptote de $\mathcal{C}_n$ en $-\infty$

2c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 0. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f_n(0) + f'_n(0)(x - 0) = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right)x$.

3a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''_n		+	
f'_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f_n est continue, strictement croissante donc elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in f(\mathbb{R})$, par définition d'une bijection l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.

3b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.

- $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} + n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\frac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$
- $f_n(u_n) = 0$
- $f_n(0) = \frac{1}{2}$

Ainsi, $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$ et par croissance de la bijection réciproque f_n^{-1} , on obtient

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

3c. En déduire la limite de la suite (u_n) . D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

3d. Déterminer enfin la limite de la suite $(nu_n)_n$. Par définition de u_n , $\frac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0$, on a donc

$$n u_n = -\frac{1}{1 + e^{u_n}}$$

Comme (u_n) converge vers 0, par composée $(n u_n)$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

EXERCICE 03

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid MD = DM\}$.

1. En écrivant M sous la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base.

- Appliquons la méthode des familles génératrices :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E \text{ ssi } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ \text{ssi } \begin{pmatrix} 0 & 3b & 3c \\ 0 & 3e & 3f \\ 0 & 3h & 3i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{cases} b = c = d = g = 0 \\ e = e; f = f; h = h; i = i \end{cases} \\ \text{ssi } M &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \\ \text{ssi } M &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$E = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

E est bien un espace vectoriel, généré par les 5 matrices ci-dessous.

- Montrons que cette famille génératrice est libre :

Soient a, e, f, h, i 5 réels tels que

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \text{ssi } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ssi } a = e = f = h = i = 0 \text{ par identification} \end{aligned}$$

Cette famille génératrice de E est donc libre : elle forme une base de E .

2. On considère l'équation $M^2 - M + D = 0$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$.

2a. Montrer qu'il n'existe pas de matrice M diagonale solution de cette équation.

Raisonnons par l'absurde, et notons $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une solution de cette équation. Alors,

$$M^2 - M + D = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - b + 3 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - c + 3 \end{pmatrix}$$

Si M est solution de E alors $b^2 - b + 3 = 0$, trinôme de discriminant strictement négatif donc sans solution réelle. C'est absurde, puisque $b \in \mathbb{R}$.

Ainsi, il n'existe pas de matrice M diagonale solution de cette équation.

2b. Montrer que si M est solution de cette équation alors $M \in E$.

Supposons que $M^2 - M + D = 0$, c'est-à-dire que $D = M - M^2$. On a :

- $MD = M \times (M - M^2) = M^2 - M^3$
- $DM = (M - M^2) \times M = M^2 - M^3$

Ces deux matrices sont égales, donc $M \in E$.

3. La réciproque à la question 2b est-elle vraie ?

Non : en effet, d'après la question, les matrices diagonales sont des matrices de E . Mais d'après le 2a, aucune matrice diagonale ne vérifie l'équation.

Remarque : la matrice I_3 est un contre-exemple facile à comprendre : elle commute avec D donc est dans E , mais ne vérifie pas l'équation.

Partie 2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid 2XP(X) = (X^2 - 1)P'(X)\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- $E \subseteq \mathbb{R}[X]$ espace vectoriel de référence.
- Le polynôme nul est dans E puisque $2X \times 0 = (X^2 - 1) \times 0'$ où 0 désigne le polynôme nul.
- Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: comme P et Q sont dans E , on a

$$\begin{aligned} 2X(P + \lambda Q) &= 2XP + \lambda 2XQ = (X^2 - 1)P'(X) + \lambda(X^2 - 1)Q'(X) \\ &= (X^2 - 1)(P + \lambda Q)' \end{aligned}$$

Le polynôme $P + \lambda Q$ est bien dans E .

2. Le but est maintenant de déterminer les éléments de E .

Analyse du problème : on considère P un élément non nul de E .

2a. Montrer que 1 et -1 sont racines de P .

Evaluons cette relation en $X = 1$, il vient : $2P(1) = 0$ donc 1 est racine de P .

Evaluons cette relation en $X = -1$, il vient : $-2P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P .

2b. En posant $n = \deg(P)$ et en identifiant les coefficients dominants, montrer que $n = 2$.

Supposons que $n = \deg(P)$ et notons a_n son coefficient dominant :

2c. En déduire une expression générale de P .

Synthèse : vérifier réciproquement que les polynômes de la forme obtenue en 2c sont dans E .

D'après 2b, P peut s'écrire sous la forme $P = aX^2 + bX + c$: dans ces conditions,

- $2XP(X) = X^3(2a) + X^2(2b) + X(2c)$
- $(X^2 - 1)P'(X) = (X^2 - 1)(2aX + b) = X^3(2a) + X^2(b) + X(-2a) + (-b)$

Par identification, on trouve $b = 0$ et $c = -a$: autrement dit, $P = aX^2 - a$ où $a \in \mathbb{R}$.

Les questions 2a, 2b, 2c nous permettent d'affirmer que $E \subseteq \{P = aX^2 - a, a \in \mathbb{R}\}$ (le polynôme nul est également de cette forme).

Réciproquement (autrement dit, faisons l'inclusion réciproque) : Si $P = aX^2 - a$, $a \in \mathbb{R}$ alors :

- $2XP(X) = 2aX^3 - 2aX$
- $(X^2 - 1)P'(X) = (X^2 - 1)(2aX) = 2aX^3 - 2aX$

Ce qui prouve bien que $P \in E$.

3. En déduire une base de E . Les deux double-inclusions de la question précédente assurent que

$$E = \{a(X^2 - 1), a \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(X^2 - 1)$$

Le polynôme non nul $X^2 - 1$ génère E , il forme donc une base de E (tout vecteur non nul est libre).

EXERCICE 04

Dans cet exercice, on s'intéresse à la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad u_1 = -\frac{1}{3} \quad (E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1. Soit w la suite définie sur $\mathbb{N}$ de terme général $w_n = (-1)^n \frac{n}{3}$. Montrer que cette suite vérifie la relation de récurrence (E) .

$$\begin{aligned} w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)}{3} + (-1)^n \frac{2n}{3} + (-1)^n = (-1)^n \left(-\frac{(n+1)}{3} + \frac{2n}{3} + 1 \right) \\ &= (-1)^n \frac{(n+2)}{3} = (-1)^{n+2} \frac{(n+2)}{3} \quad \text{car } (-1)^{n+2} = (-1)^n \end{aligned}$$

Ainsi (w_n) est solution de (E) .

2. Soit y la suite définie par le terme général $y_n = u_n - w_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$.

D'après l'énoncé et Q1, on a $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n \\ w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n + (-1)^n \end{cases}$ donc par différence,

$$u_{n+2} - w_{n+2} = u_{n+1} - w_{n+1} + 2(u_n - w_n) \quad \text{càd} \quad y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n.$$

2b. En déduire une expression générale du terme général de la suite y .

(y_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : son équation caractéristique est

$$X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$$

Il existe donc deux réels a et b tels que pour tout naturel n , $y_n = a(-1)^n + b2^n$.

$$\text{De plus : } \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} : \text{ainsi, pour tout naturel } n, y_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}.$$

2c. En déduire une expression générale du terme général de la suite u . Par définition de y_n ,

$$u_n = y_n + w_n = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} + (-1)^n \frac{2n}{3} = \frac{2(-1)^n + 2^n + 2n(-1)^n}{3}$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

3a. A l'aide de la relation (E) écrite avec $n = k - 1$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{k=n+1} (u_{k+1} - u_k) - \sum_{j=0}^{j=n} (-1)^j \right)$$

Suivons le conseil donné dans l'énoncé et écrivons la relation (E) avec $n = k - 1$, il vient

$$u_{k+1} = u_k + 2u_{k-1} + (-1)^{k-1} \text{ et donc } u_{k+1} - u_k = 2u_{k-1} + (-1)^{k-1}$$

Sommons de $k = 1$ à $k = n + 1$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} (u_{k+1} - u_k) = 2 \sum_{k=1}^{k=n+1} u_{k-1} + \sum_{k=1}^{k=n+1} (-1)^{k-1}$$

Un changement d'indice $K = k - 1$ sur les deux termes du membre de droite donne alors

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} (u_{k+1} - u_k) = 2 \sum_{k=0}^{k=n} u_K + \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k$$

D'où le résultat

3b. En déduire une expression explicite de S_n . Cette suite admet-elle une limite ?

- Par télescopage : $\sum_{k=1}^{k=n+1} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+2} - u_1$
- A l'aide des sommes géométriques, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{j=n} (-1)^j = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 - (-1)}$$

On trouve ainsi que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left(u_{n+2} - u_1 + \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(u_{n+2} + \frac{5}{6} + \frac{(-1)^n}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(-1)^n + 2^n + 2n(-1)^n}{3} + \frac{5}{6} + \frac{(-1)^n}{2} \right) \end{aligned}$$

Factorisons par 2^n : comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} = 0$, on obtient que (S_n) converge et que sa limite est $\frac{1}{6}$.