



Fichier extrait du document

## [2021-2022 DS01 et corrigé - Math Approfondies ECG1](#)

### Informations générales

Type : [Devoirs Surveillés](#)

Classe(s) : [CPGE ECG 1ère année](#)

Matières : [Mathématiques Approfondies](#)

Mots clés : équations, inéquations, règles de calculs, suites, récurrence, limite, dérivée

Les fichiers du [document 1710](#)

## Derniers docs de CPGE ECG 1ère année

- ? [Cours ECG1 Maths Approfondies: matrices, systèmes, espaces vectoriels](#)
- ? [ECG1, Maths Approfondies : Chapitre sur les polynômes](#)
- ? [Cours ECG1 - Maths Approfondies : Convergence, suites usuelles](#)
- ? [Cours ECG1 - Maths Approfondies : Raisonnements, Ensembles, Applications](#)
- C [Travail de révisions, avec corrigés - Maths Approfondies en ECG1](#)



Lien vers le Doc 1710



[revisermonconcours.fr](http://revisermonconcours.fr)

# DEVOIR SURVEILLE 01 – ECG1

## MATHEMATIQUES APPROFONDIES

**Durée : 3h**

Calculatrice interdite.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### EXERCICE 01

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} ; B = \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{5}} ; C = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right) ; D = \frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$$

2. Sachant que  $e \approx 2.7$ , donner le signe de  $\ln 2 - 0.5$ , en justifiant votre réponse.

3. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $-2 \leq a \leq 1$  et  $1 \leq b \leq 3$ .  
Encadrer au mieux les nombres suivants :  $a^2$  puis  $a - 2b$ .

4. Exprimer comme quotient de deux entiers les nombres suivants :

$$A = e^{\ln 2 - \ln 3} ; B = \frac{\ln 8 - \ln 2}{\ln 2} ; C = \frac{12^3 \times 100}{4^4 \times 27}$$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

$$\text{A. } x^2 \leq 5 \quad \text{B. } \frac{x-2}{3-4x} < 1 \quad \text{C. } x+2 < \frac{3}{x+2} \quad \text{D. } 2 - 3 \ln x \leq 3$$

6. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$ .

7. Dresser le **tableau de variations** complet de la fonction  $f$  suivante sur  $\mathbb{R}$ .

Justifier précisément les limites de  $f$  aux bornes de son domaine :  $f(x) = xe^{-2x}$ .

8. Déterminer le signe du trinôme  $11m^2 + 11m - 22$  de variable réelle  $m$ .

9. Pour quelles valeurs du réel  $k$  l'équation  $\frac{x}{1+x+x^2} = k$  d'inconnue le réel  $x$  a-t-elle au moins une solution ?

### EXERCICE 02

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{-x} + 2x$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{-x} < \frac{2}{3}$ .

2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction  $f$ , en justifiant votre réponse.

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ .

**1.** Calculer les termes  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

**2a.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq n + 3$ .

**2b.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ .

**2c.** En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

**3.** On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .

**3a.** Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .

**3b.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ .

**3c.** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**4.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  et  $T_n = \frac{S_n}{n^2}$ .

**4a.** Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .

**4b.** Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .

## CORRIGE EXERCICE 01

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} ; B = \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{5}} ; C = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right) ; D = \frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2}$$

Voici les calculs demandés :

$$A = \frac{1}{6} + \frac{6}{8} + \frac{5}{9} = \frac{3}{18} + \frac{3}{4} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18} + \frac{3}{4} = \frac{26}{36} + \frac{27}{36} = \frac{53}{36}$$

$$B = \frac{\frac{4}{25} - \frac{6}{35}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}\right)}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{28-30}{35}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{35} \times \frac{2}{5} = -\frac{4}{35 \times 5}$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{29}{12} = \frac{29}{48}$$

$$D = \frac{(-18)^7 \times 2^4 \times (-50)^3}{(-25)^4 \times (-4)^5 \times (-27)^2} = -\frac{2^7 3^{14} \times 2^4 \times 2^3 5^6}{5^8 \times 2^{10} \times 3^6} = -\frac{2^{14} 3^{14} 5^6}{2^{10} 3^6 5^8} = -\frac{2^4 3^8}{5^2}$$

2. Sachant que  $e \approx 2.7$ , donner le signe de  $\ln 2 - 0.5$ , en justifiant votre réponse. Notons  $A = \ln 2 - 0.5$  :

$$A = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln e \text{ puisque } \ln e = 1$$

$$A = \ln 2 - \ln \sqrt{e} \text{ puisque } n \ln a = \ln(a^n) \text{ pour tout rationnelle } n, \text{ et qu'on sait que } a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$A = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{e}}\right) \text{ puisque } \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$A = \ln\left(\sqrt{\frac{4}{e}}\right) \text{ puisque } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ (même règle que pour les puissances)}$$

$$\text{Enfin, } A = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{e}\right) \text{ puisque } \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Puisque  $e \approx 2.7$  alors  $\frac{4}{e} > 1$  et comme la fonction  $\ln$  est croissante, on a bien  $A = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{e} > \frac{1}{2} \ln 1 = 0$ .

### Méthode 2.

On a  $\ln 2 - 0.5 > 0 \Leftrightarrow \ln 2 > 0.5 \Leftrightarrow 2 > e^{0.5}$  puisque l'exponentielle est croissante strictement.

Ainsi :  $\ln 2 - 0.5 > 0 \Leftrightarrow 4 > e^1$  en passant au carré, les quantités en jeu étant positives.

3. Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $-2 \leq a \leq 1$  et  $1 \leq b \leq 3$ .

Encadrer au mieux les nombres suivants :  $a^2$  puis  $a - 2b$ .

- Attention, la fonction carré n'est pas croissante sur  $[-2; 1]$ . On peut juste affirmer que si  $-2 \leq a \leq 1$  alors  $0 \leq a^2 \leq 4$ .
- Attention, on ne peut pas soustraire des inégalités, la stratégie est la suivante : multiplier par  $-2$  et ajouter.  
On a  
 $-2 \leq a \leq 1$  puis  $-2 \leq a \leq 1$   
 $1 \leq b \leq 3$  puis  $-6 \leq -2b \leq -2$  puis on peut additionner des inégalités rangées dans le même sens, ce qui donne :  $-8 \leq a - 2b \leq -1$ .

4. Exprimer comme quotient de deux entiers les nombres suivants :

$$A = e^{\ln 2 - \ln 3} ; B = \frac{\ln 8 - \ln 2}{\ln 2} ; C = \frac{12^3 \times 100}{4^4 \times 27}$$

On a :

$$A = e^{\ln 2 - \ln 3} = e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{\ln 8 - \ln 2}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{8}{2}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

$$C = \frac{4^3 \times 3^3 \times 4 \times 25}{4^4 \times 3^3} = 25$$

5. Résoudre sur leur domaine les inéquations suivantes :

A.  $x^2 \leq 5$

B.  $\frac{x-2}{3-4x} < 1$

C.  $x + 2 < \frac{3}{x+2}$

D.  $2 - 3 \ln x \leq 3$

5A.  $x^2 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 \leq 0$  : on reconnaît un trinôme de racines  $-\sqrt{5}$  et  $\sqrt{5}$ , de coefficient dominant positif. Il est donc négatif entre ses racines.  $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ .

5B.  $\frac{x-2}{3-4x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3-4x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3-4x} - \frac{(3-4x)}{3-4x} < 0 \Leftrightarrow \frac{5x-5}{3-4x} < 0$  : on pourrait à ce stade dresser un tableau de signes, mais en remarquant que le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit, l'étude du signe du trinôme  $(5x - 1)(3 - 4x)$  suffit.

Il est de racines évidentes 1 et  $\frac{3}{4}$ , de coefficient dominant négatif donc  $S = ]-\infty; 3/4[ \cup ]1; +\infty[$

5C.  $x + 2 < \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow x + 2 - \frac{3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2 - 3}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})}{x+2} < 0$  : un tableau de signes semble ici indispensable. Notez que le numérateur est un trinôme de racines  $-2 + \sqrt{3}$  et  $-2 - \sqrt{3}$ , de coefficient dominant positif.

| $x$                 | $-\infty$ | $-2-\sqrt{3}$ | $-2$ | $-2+\sqrt{3}$ | $+\infty$ |     |     |     |     |
|---------------------|-----------|---------------|------|---------------|-----------|-----|-----|-----|-----|
| $(x+2)^2-3$         |           | $+$           | $0$  | $-$           | $ $       | $-$ | $0$ | $+$ |     |
| $x+2$               |           | $-$           |      | $ $           | $-$       | $0$ | $+$ | $ $ | $+$ |
| $\frac{9x-8}{3-4x}$ |           | $-$           | $0$  | $+$           | $  $      | $-$ | $0$ | $+$ |     |

$$S = ]-\infty; -2 - \sqrt{3}[ \cup ]-2; -2 + \sqrt{3}[$$

5D.  $2 - 3 \ln x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 3 \ln x \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{3}}$

## 6. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 1$ .

On pose  $\mathcal{P}(n) : "2^n \geq n + 1"$ .

– Initialisation de la récurrence : cas  $n = 0$ .

$2^0 = 1 \geq 0 + 1$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

– Hérité : Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  soit vraie pour un certain  $n$  ; on a donc  $2^n \geq n + 1$ .

Nous devons prouver que (pour ce  $n$ )  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie, c'est-à-dire que  $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1 = n + 2$ .

Mais  $2^{n+1} = 2 \times 2^n$  donc comme par hypothèse de récurrence, on a  $2^n \geq n + 1$  et que  $2 \geq 0$ ,

on obtient  $2 \times 2^n \geq 2(n + 1)$  soit  $2^{n+1} \geq 2n + 2$ .

Or  $2n + 2 - (n + 2) = n \geq 0$  donc  $2n + 2 \geq n + 2$ .

Par conséquent  $2^{n+1} \geq 2n + 2 \geq n + 2$ , ce qui démontre que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie.

– Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier  $n$  positif.

## 7. Dresser le **tableau de variations** complet de la fonction $f$ suivante sur $\mathbb{R}$ .

Justifier précisément les limites de  $f$  aux bornes de son domaine :  $f(x) = xe^{-2x}$ .

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f'(x) = 1e^{-2x} + x(-2)e^{-2x} = e^{-2x}(1 - 2x)$  qui est du signe de  $1 - 2x$

On a par ailleurs :

|      |           |                     |           |
|------|-----------|---------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $1/2$               | $+\infty$ |
| $f'$ | $+$       | $0$                 | $-$       |
| $f$  | $-\infty$ | $\frac{1}{2}e^{-1}$ | $0$       |

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  par produit («  $-\infty \times (+\infty)$  »)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  par croissances comparées

## 8. Déterminer le signe du trinôme $11m^2 + 11m - 22$ de variable réelle $m$ .

On pourrait passer par le discriminant, mais il y a plus rapide !

$$11m^2 + 11m - 22 = 11(m^2 + m - 2) \stackrel{\text{racines évidentes}}{\cong} 11(m - 1)(m + 2)$$

Ses racines sont  $-1$  et  $2$  : comme son coefficient dominant est négatif, on obtient :

|                    |           |      |     |           |     |
|--------------------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $m$                | $-\infty$ | $-2$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $11m^2 + 11m - 22$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

## 9. Pour quelles valeurs du réel $k$ l'équation $\frac{x}{1+x+x^2} = k$ d'inconnue le réel $x$ a-t-elle au moins une solution ?

Domaine de validité :  $D = \mathbb{R}$  car le trinôme au dénominateur est de discriminant strictement négatif.

- Sur  $D : \frac{x}{1+x+x^2} = k \Leftrightarrow x = k + kx + kx^2 \Leftrightarrow kx^2 + (k - 1)x + k = 0$ 
  - Si  $k = 0$  : l'équation de degré 1  $-x = 0$  a au moins une solution (exactement une même)
  - Sinon : le trinôme  $kx^2 + (k - 1)x + k$  est de discriminant
$$\delta = (k - 1)^2 - 4k^2 = (k - 1 - 2k)(k - 1 + 2k) = (-k - 1)(3k - 1)$$
On veut que  $\delta \geq 0$  donc on étudie le nouveau trinôme  $(-k - 1)(3k - 1)$ , de racines évidentes  $-1$  et  $\frac{1}{3}$ . Étant de coefficient dominant négatif, il est positif entre ses racines.

On trouve que  $S = \left[-1; \frac{1}{3}\right]$ , ensemble des solutions de ce problème (0 est dedans).

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3e^{-x} + 2x$ .

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{-x} < \frac{2}{3}$ . Par croissance (stricte) du logarithme,

$$e^{-x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x < \ln \frac{2}{3} \Leftrightarrow x > -\ln \frac{2}{3} = \ln \frac{3}{2}$$

2. Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

- $f$  est dérivable de dérivée  $f'(x) = -3e^{-x} + 2$
- Etudions par exemple l'inéquation  $f'(x) > 0$  :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -3e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in [\ln \frac{3}{2}; +\infty[$$

D'après Q1, on obtient alors

|      |           |                         |           |
|------|-----------|-------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $\ln \frac{3}{2}$       | $+\infty$ |
| $f'$ | -         | 0                       | +         |
| $f$  | $+\infty$ | $2 + 2 \ln \frac{3}{2}$ | $+\infty$ |

- Par somme,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  («  $0 + \infty$  »)
- En  $-\infty$  :  $f(x) = 3e^{-x} + 2x = e^{-x}(3 + 2xe^x)$ .

Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  donc par produit,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

3. Déterminer le nombre de zéros de la fonction  $f$ , en justifiant votre réponse. Comme  $2 + 2 \ln \frac{3}{2} > 0$ ,  $f$  est minorée par un réel strictement positif donc elle ne s'annule pas.

## CORRIGE EXERCICE 03

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ .

1a. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . On obtient  $u_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ ;  $u_2 = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$ ;  $u_3 = 3 + \frac{16}{27} = \frac{97}{27}$ .

2a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq n + 3$ . Procédons par récurrence et notons  $P(n)$  la propriété : «  $u_n \leq n + 3$  » où  $n \in \mathbb{N}$ .

- Puisque l'on a  $u_0 = 2$ , on vérifie bien que  $u_0 \leq 0 + 3$  :  $P(0)$  est donc vraie.
- Supposons  $P(n)$  vraie à un rang  $n$ , c'est-à-dire que  $u_n \leq n + 3$ . Par conséquent :

$$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n + 3) \text{ c'est-à-dire } \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}n + 2.$$

On en déduit que :  $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$  : mais par définition,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \text{ donc on a obtenu que } u_{n+1} \leq n + 3.$$

Or  $n + 3 \leq n + 4$ , d'où  $u_{n+1} \leq n + 4$  c'est-à-dire que  $P(n + 1)$  est vraie.

- La propriété est vraie pour  $n = 0$  et elle est héréditaire : elle est donc vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**2b.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ . On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3} = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

**2c.** En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ . Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout  $n$  naturel, on a  $u_n \leq n + 3$  ce qui équivaut à dire que  $n + 3 - u_n$  est positive et donc que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

**3.** On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .

**3a.** Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ . Exprimons  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

Donc  $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$  : la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$ , de premier terme  $v_0 = u_0 - 0 = 2$ .

**3b.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ . On déduit du 3a que  $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

Comme pour tout  $n$ ,  $v_n = u_n - n$ , on obtient  $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ .

**3c.** Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . Puisque la raison  $q$  vérifie  $-1 < q < 1$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et par somme de limites, on trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**4.** Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  et  $T_n = \frac{S_n}{n^2}$ .

**4a.** Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ . Par linéarité de la somme, on

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n 2\left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^n k$$

- Les résultats sur les sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique donnent

$$\sum_{k=0}^n 2\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

- Ceux sur les sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique donnent

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ainsi, on a

$$S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

**4b.** Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ . Par conséquent,

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$T_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

- Puisque  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ .

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 6$ .

Par ailleurs,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ , donc par limite d'un quotient de suites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} = 0$ .

De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$ , et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite  $T$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .