



Fichier extrait du document
[2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)

Informations générales

Type : [Devoirs Surveillés](#)

Classe(s) : [CPGE ECS 1](#)

Matières : [Mathématiques](#)

Mots clés : intégration, probabilités finies, espace vectoriel

Les fichiers du [document 1704](#)

- 2020-2021 DS06 -Février #doc 1704

Derniers docs de CPGE ECS 1

- [Exos corrigés de révisions pour la rentrée en prépa Eco S 1ère année](#)
- [2020-2021 Concours Blanc 02 de Mathématiques et corrigé, ECS1](#)
- [2020-2021 DS 09 et corrigé de Math. Mai](#)
- ? [Chapitre sur les espaces probabilisés infinis, les variables aléatoires discrètes et lois usuelles](#)
- [2020-2021 DS08 surprise de Mathématiques et corrigé](#)
- ? [Cours sur les séries numériques, ECS1](#)
- [2020-2021 DS 06 et corrigé de Mars, Mathématiques](#)
- ? [ECS1 : Applications linéaires en dimension finie](#)



Lien vers le Doc 1704



revisermonconcours.fr

Durée : 4h

Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE 01

Pour tout entier naturel n on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. Calculer u_0 et u_1 .

2a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

2b. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ?

3a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n = nu_{n-1} - 1$.

3b. Ecrire une fonction Scilab d'en-tête $z = u(n)$ qui à un entier n associe la valeur de u_n .

3c. A l'aide du (3a), déduire que pour tout entier $n \geq 0$ on a $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.

3d. Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

4. Soit a un nombre réel et $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = a \\ \forall n \geq 1, v_n = nv_{n-1} - 1 \end{cases}$.

4a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = n! \left(a - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$.

4b. En déduire que la suite (v_n) converge si et seulement si $a = u_0$.

5a. Montrer à l'aide du 3a que pour tout entier naturel $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$

5b. En déduire que $u_n - \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

EXERCICE 2

Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $H = \text{vect}((1, 1, 2))$.

1. Prouver que F et G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base.

2a. Déterminer une base de l'espace vectoriel $G \cap H$.

2b. Déterminer une base de l'espace vectoriel $G + H$.

2c. Les espaces G et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. Prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

4a. Justifier que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$.

4b. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Par un raisonnement d'analyse-synthèse, déterminer les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 de la décomposition du 4a, en fonction des coordonnées du vecteur u .

EXERCICE 3

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R} : E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel. En déterminer une base.
2. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
3. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
 - 3a. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
 - 3b. Vérifier que $P^{-1}AP = D_A$
4. Vérifier que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale, et identifier là.
5. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}.$$
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.
7. Montrer que B^2 est un élément de E . La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

EXERCICE 4

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 5, 3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

0. Déterminer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le support de la variable aléatoire X_n .

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

- 1a. Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$.
- 1b. Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3 .

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n = n + 1)$.
- 5a. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$.
- 5b. A l'aide d'un système complet d'événements bien choisi, en déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
6. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.
En déduire que $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
7. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k - 1)$ et de $P(X_n > k)$.
8. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n + 1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

ELEMENTS DE CORRECTION

CORRIGE EXERCICE 01

Pour tout entier naturel n on pose $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. Calculer u_0 et u_1 .

- $u_0 = \int_0^1 x^0 e^{1-x} dx = \int_0^1 e^{1-x} dx = [-e^{1-x}]_0^1 = -(e^0 - e) = e - 1$
- $u_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} dx$. Effectuons une IPP :
Posons $\begin{cases} u = x \\ v' = e^{1-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{1-x} \end{cases}$: les fonctions u et v sont $C^1([0; 1])$ donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$u_1 = -[x e^{1-x}]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 e^{1-x} dx}_{u_0} = -1 + e - 1 = e - 2$$

2a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

Méthode : Pour encadrer une intégrale, cherchons déjà à encadrer l'intégrande.

Pour $0 \leq x \leq 1$
 $0 \leq 1 - x \leq 1$ par décroissance de la fonction $x \rightarrow 1 - x$
 $0 \leq 1 \leq e^{1-x} \leq e$ par croissance de la fonction $\exp$
 $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ car $x^n \geq 0$ pour $x \geq 0$

Les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, l'intégration conserve l'ordre et on obtient :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n e dx = e \int_0^1 x^n dx = e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

2b. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Le théorème des gendarmes appliqué au 2a assure que la suite (u_n) converge vers 0.

3a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $u_n = n u_{n-1} - 1$.

Méthode : Pour établir une relation de récurrence sur une suite d'intégrales, on peut utiliser une IPP.

$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$. Effectuons une IPP :

Posons $\begin{cases} u = x^n \\ v' = e^{1-x} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u' = n x^{n-1} \\ v = -e^{1-x} \end{cases}$: les fonctions u et v sont $C^1([0; 1])$ donc d'après la formule d'intégration par parties,

$$u_n = -[x^n e^{1-x}]_0^1 + n \underbrace{\int_0^1 x^{n-1} e^{1-x} dx}_{u_{n-1}} = -1 + n u_{n-1}$$

3b. Ecrire une fonction Scilab d'en-tête $z = u(n)$ qui à un entier n associe la valeur de u_n .

```
function z = u(n)
    z = %e - 1 // le nombre e est une constante
    for k = 1:n
        z = k * z - 1
    end
endfunction
```

3c. A l'aide du (3a), déduire que pour tout entier $n \geq 0$ on a $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.

Soit $P(n)$ la proposition « $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$ » pour $n \geq 0$:

- $u_0 = e - 1$ et $0! \left(e - \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} \right) = e - 1$ donc $P(0)$ est vraie
- Supposons que pour un rang $n \geq 0$ on ait $u_n = n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.

D'après le 3a on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 \\ &= (n+1) \times n! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) - 1 \quad \text{par H.R.} \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) - 1 \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) - 1 \\ &= (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right) + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} - 1 = (n+1)! \left(e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

3d. Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

- D'après Q2b, $u_n \rightarrow 0$ et d'après la question précédente $\frac{u_n}{n!} = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
- Ainsi $\frac{u_n}{n!} \rightarrow 0$ par quotient et par conséquent $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow 0$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

4. Soit a un nombre réel et $(v_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = a \\ \forall n \geq 1, v_n = n v_{n-1} - 1 \end{cases}$.

4a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n = n! \left(a - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right)$.

Seule l'initialisation de la récurrence du 3c change (l'hérédité est la même).

Or :

- $v_1 = 1a - 1 = a - 1$
- $1! \left(a - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k!} \right) = a - 1$

4b. En déduire que la suite (v_n) converge si et seulement si $a = u_0$.

Procédons par double implication.

$\Rightarrow$ si (v_n) converge alors par quotient, $\frac{v_n}{n!} \rightarrow 0$.

Par conséquent, $a - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \rightarrow 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = a$.

Ajoutons 1 dans chaque membre, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = a + 1$

Par unicité de la limite, d'après le 3d, on a $a + 1 = e$ et donc $a = e - 1 = u_0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $a = u_0$. Dans ce cas, $v_n = u_n$ (même condition initiale et même relation de récurrence).

Et donc (v_n) converge, comme (u_n) , d'après le 2b.

5a. Montrer à l'aide du 3a que pour tout entier naturel $n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

D'après le 3a, on a $u_n = -1 + n u_{n-1}$ et pour $n \leftrightarrow n+2$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -1 + (n+2)u_{n+1} \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_{n+2} + 1}{n+2} \end{aligned}$$

et pour $n \leftrightarrow n+1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -1 + (n+1)u_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{u_{n+1} + 1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, cette dernière égalité donne,

$$u_n = \frac{u_{n+1} + 1}{n+1} = \frac{\frac{u_{n+2} + 1}{n+2} + 1}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{u_{n+2} + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

5b. En déduire que $u_n - \frac{1}{n} = o(\frac{1}{n^2})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$. D'après le 5a,

$$u_n - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

Et donc

$$\frac{u_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 \left(u_n - \frac{1}{n} \right) = \frac{-n^2}{n(n+1)} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} u_{n+2}$$

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{n(n+1)} = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+2} = 0$ donc on obtient bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 0$.

CORRIGE EXERCICE 02

Soit $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \right\}$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $H = \text{vect}((1, 1, 2))$.

1. Prouver que F et G sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.

- On a $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = y \end{cases}$: ainsi, $u = (x, y, z) \in F \Leftrightarrow u = (y, y, -y) \Leftrightarrow u = y(1, 1, -1)$.

Ainsi, $F = \text{vect}((1, 1, -1))$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(1, 1, -1)$.

- De même, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\} = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ainsi $G = \text{vect}((1, 0, 1); (0, 1, 1))$. Ces deux vecteurs générateurs n'étant pas colinéaires, ils forment une base de G .

2a. Déterminer une base de l'espace vectoriel $G \cap H$. On remarque que $H \subseteq G$ (puisque le vecteur générateur de H vérifie les deux équations caractéristiques de G).

Ainsi $G \cap H = H$ et une base de $G \cap H$ est donc celle de $H : (1, 1, 2)$

2b. Déterminer une base de l'espace vectoriel $G + H$. D'après le 2a, $G + H = G$.

En effet, la méthode de concaténation des bases fournit une famille génératrice de $G + H$. Comme le vecteur générateur de H est dans G , il est combinaison linéaire des deux vecteurs générateurs de G et on obtient :

$$G + H = \text{vect}\left(\underbrace{(1, 0, 1); (0, 1, 1)}_G; \underbrace{(1, 1, 2)}_H\right) = \text{vect}((1, 0, 1); (0, 1, 1)) = G$$

2c. Les espaces G et H sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Non, leur somme n'est pas directe d'après le 2a.

3. Prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

- D'après Q1, $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
- Soit $u \in F \cap G$: alors $u \in F$ donc il existe un réel k tel que $u = (k, k, -k)$. Et comme $u \in G$, on en déduit que $k + k - (-k) = 0$ (cf équation cartésienne) et donc $k = 0$: ainsi $u = (0, 0, -0) = 0$.
La somme est directe.

Remarque : la méthode par concaténation des bases était tout aussi efficace.

4a. Justifier que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$ se décompose de manière unique sous la forme $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$. D'après Q2, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

- Ainsi, $F + G = \mathbb{R}^3$ donc pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.
- La somme est directe donc cette décomposition est unique.

La question 4a est en fait une des caractéristiques de la notion de supplémentaire.

4b. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Par un raisonnement d'analyse-synthèse, déterminer les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 de la décomposition du 4a, en fonction des coordonnées du vecteur u .

Analyse : Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.

- $u_1 \in F$ donc il existe un réel k tel que $u_1 = (k, k, -k)$
- On a alors $u_2 = u - u_1 = (a, b, c) - (k, k, -k) = (a - k, b - k, c + k)$.
Comme $u_2 = (a - k, b - k, c + k) \in G$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne et donc

$$a - k + (b - k) - (c + k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}(a + b - c)$$

- Ainsi, si cette décomposition existe alors $\begin{cases} u_1 = (k, k, -k) \\ u_2 = (a - k, b - k, c + k) \end{cases}$ où $k = \frac{1}{3}(a + b - c)$.

Synthèse : Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Posons $\begin{cases} u_1 = (k, k, -k) \\ u_2 = (a - k, b - k, c + k) \end{cases}$ où $k = \frac{1}{3}(a + b - c)$.

- $u_1 + u_2 = \dots = (a, b, c) = u$
- $u_1 = k(1, 1, -1) \in \text{vect}((1, 1, -1)) = F$
- $a - k + (b - k) - (c + k) = -3k + a + b - c = 0$ donc $u_2 \in G$

CORRIGE EXERCICE 03

Pour tout couple de réels (x, y) , on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$: $E = \{M(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

On remarque que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel. En déterminer une base.

$$M(x, y) \in E \Leftrightarrow M(x, y) = x \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = xA + yB$$

- Ainsi E est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices A et B donc $E = \text{vect}(A, B)$.
- Par ailleurs, la famille (A, B) est libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires.

(A, B) est donc une base de E .

2. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 & 2 \\ -1 & 4 - \lambda & -2 \\ 0 & 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 - \lambda & -2 & : L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3 - \lambda & -2 & 2 & : \\ 0 & 4 & -1 - \lambda & : \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 - \lambda & -2 & : \\ 0 & \lambda^2 - 7\lambda + 10 & 2(\lambda - 2) & : (3 - \lambda)L_1 + L_2 \\ 0 & 4 & -1 - \lambda & : \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 - \lambda & -2 & : \\ 0 & 4 & -1 - \lambda & : L_3 \leftrightarrow L_2 \\ 0 & \lambda^2 - 7\lambda + 10 & 2(\lambda - 2) & : \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -1 & 4 - \lambda & -2 & : \\ 0 & 4 & -1 - \lambda & : \\ 0 & 0 & P(\lambda) & : (\lambda^2 - 7\lambda + 10)L_2 - 4L_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $P(\lambda) = (\lambda^2 - 7\lambda + 10)(-1 - \lambda) - 4(2(\lambda - 2)) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$.

Ce polynôme admet 1 pour racine évidente, on en déduit ses deux autres racines : 2 et 3.

Ainsi, $A - \lambda I$ non inversible si et seulement si $\lambda \in \{1; 2; 3\}$.

3. Soit P la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ et $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3a. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1} . La méthode de la réduite de Gauss-Jordan donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3b. Vérifier que $P^{-1}AP = D_A$

- $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $AP = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -6 & -3 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$
- $P^{-1}AP = D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Vérifier que $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale, et identifier là. Le calcul donne

- $P^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $BP = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- $P^{-1}BP = D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M(x, y) = PD(x, y)P^{-1}$.
On a d'après Q1 :

$$\begin{aligned} P^{-1}M(x, y)P &= P^{-1}(xA + yB)P = xP^{-1}AP + yP^{-1}BP \\ &= xD_A + yD_B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix} = D(x, y) \end{aligned}$$

On obtient alors facilement le résultat voulu.

6. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

$M(x, y)$ inversible ssi $P^{-1}M(x, y)P$ inversible ssi $D(x, y)$ inversible ssi $x \neq 0$ et $y \neq 2x$ et $y \neq 3x$.

7. Montrer que B^2 est un élément de E . La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Rappel : par définition, une matrice M est dans E si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $M = xA + yB$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = -B \in E$ car par exemple, $-B = 0A + (-1)B = M(0, -1)$ avec les notations de l'énoncé.
- $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & 8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & 8 \\ -4 & 12 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & -2x + 2y & 2x - y \\ -x - y & 4x - 3y & -2x + y \\ -2y & 4x - 4y & -x + y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = 2 \\ -x - y = -7 \end{cases} : \text{absurde.} \quad \text{Donc } A^2 \notin E.$$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue une succession de $(n + 1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 5, 3, alors $X_5 = 4$.

Pour tout k de $\llbracket 1 ; n + 1 \rrbracket$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

0. Déterminer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le support de la variable aléatoire X_n .

- Notons qu'au minimum, $X_n = 2$ puisqu'il faut 2 tirages minimum pour comparer un tirage et son précédent.
- Par ailleurs, au maximum $X_n = n + 1$ puisqu'on effectue $n+1$ tirages et cet événement peut se réaliser si on pioche au 1^{er} tirage la boule n° n , puis la $n - 1$, ..., puis la 1 : il reste alors un dernier tirage à faire, et le numéro obtenu sera inévitablement supérieur ou égal à 1.
- Tous les cas intermédiaires pouvant être réalisés,

$$X_n(\Omega) = \llbracket 2 ; n + 1 \rrbracket .$$

Notons que les tirages des boules étant avec remise, les tirages sont indépendants.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$. L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1a. Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3 . En déduire $P(X_3 = 4)$. Nécessairement,

$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1).$$

Par indépendance des tirages, on obtient alors

$$P(X_3 = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

1b. Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$, et en déduire $P(X_3 = 3)$. De même,

$$(X_3 = 2) = (N_1 = 1) \cup ((N_1 = 2) \cap (N_2 \geq 2)) \cup ((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3))$$

Par incompatibilité, puis indépendance, on obtient :

$$P(X_3 = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Comme $X_3(\Omega) = \{2 ; 3 ; 4\}$, on en déduit que

$$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 4) - P(X_3 = 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27 - 18 - 1}{27} = \frac{8}{27}$$

2. Calculer l'espérance de X_3 . La v.a X_3 est finie, elle admet donc pour espérance :

$$E(X_3) = 4 \times \frac{1}{27} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} = \frac{4 + 36 + 24}{27} = \frac{64}{27}$$

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $\llbracket 1 ; n + 1 \rrbracket$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

Pour tout $k \in \llbracket 2 ; n + 1 \rrbracket$, par équiprobabilité, la v.a N_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, et donc

$$E(N_k) = \frac{n+1}{2} ; \quad V(N_k) = \frac{n^2-1}{12}$$

4. Calculer $P(X_n = n + 1)$. C'est le cas facile !

$$(X_n = n + 1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n - 1) \cap \dots \cap (N_n = 1)$$

donc par indépendance :

$$P(X_n = n + 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

5a. Montrer, pour tout i de $\llbracket 1 ; n \rrbracket$: $P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}$. Sachant $(N_1 = i)$, l'événement $(X_n = 2)$ est réalisé si et seulement si on obtient au deuxième tirage un numéro supérieur ou égal à i .

Il y a n numéros en tout, $i - 1$ sont inférieurs à i , donc $n - (i - 1) = n - i + 1$ sont supérieurs ou égaux à i , il y a donc $n - i + 1$ cas favorables et n possibles, donc

$$P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n - i + 1}{n}$$

5b. A l'aide d'un système complet d'événements bien choisi, en déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N_1 = i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$\begin{aligned} P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^n P(N_1 = i)P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{n-i+1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \stackrel{k=n-i+1}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

6. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$.

En déduire que $P(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}$.

$(X_n > k)$ est réalisé si et seulement si au cours des k premiers tirages (plus exactement, au cours des tirages n°2, ..., k) on n'a jamais obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent càd ssi on a obtenu au cours des k premiers tirages un numéro inférieur au précédent, donc

$$(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \dots > N_k)$$

- Un résultat de cette expérience est une suite $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ à k éléments d'un ensemble à n éléments (l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$). Il y a n^k telles suites.
- Parmi ces suites, combien y a-t-il de suites strictement décroissantes, qui réalisent l'événement $(N_1 > N_2 > \dots > N_k)$? Il y en a $\binom{n}{k}$. En effet, il y a autant de suites strictement décroissantes à k éléments d'un ensemble à n éléments que de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. *Explication : étant donnée une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, il y a une et une seule manière d'écrire ses éléments en ordre (strictement) décroissant...*

On obtient donc, en divisant le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles :

$$P(X_n > k) = P(N_1 > N_2 > \dots > N_k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$$

Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

Pour $k = 0$, $P(X_n > 0) = 1$, et $\frac{1}{n^0} \binom{n}{0} = 1$.

Pour $k = 1$, $P(X_n > 1) = 1$ et $\frac{1}{n^1} \binom{n}{1} = \frac{1}{n} n = 1$. L'égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

7. Exprimer, pour tout $k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.

X_n étant à valus entières, on a $(X_n > k) \cup (X_n = k) = (X_n > k-1)$, donc par incompatibilité on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_n > k) + P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) \\ P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) - P(X_n > k) \end{aligned}$$

8. Montrer : $\forall k \in \llbracket 2; n+1 \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{n^k} \left[n \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} \right] \\ &= \frac{1}{n^k} \left[\frac{n n!}{(k-1)! (n-k+1)!} - \frac{k! (n-k)!}{n!} \right] = \frac{1}{n^k} \frac{n n! k - n! (n-k+1)!}{k! (n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{n^k} \frac{n! (nk - n + k - 1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{1}{n^k} \frac{n! (n(k-1) + k - 1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{1}{n^k} \frac{n! (n+1)(k-1)}{k! (n-k+1)!} \\ &= \frac{1}{n^k} \frac{(n+1)! (k-1)}{k! (n-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)!}{k! (n-k+1)!} = \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$