

Spécialité – Arithmétique - Exercices

Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1

Dresser la listes des diviseurs de : 150 et 230

Exercice 2

Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient : $x^2 = y^2 + 21$

Exercice 3

Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

a) $n^2 + n = 20$

b) $n^2 + 2n = 35$

Exercice 4

Déterminer les entiers relatifs n tel que :

a) $n + 1$ divise $3n - 4$

b) $n + 3$ divise $n + 10$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier relatif a , 6 divise $a(a^2 - 1)$

Exercice 6

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$

a) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$

b) Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 7

n est un naturel. Démontrer que quel que soit n , $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Exercice 8

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminer les valeurs de n pour lesquelles $n + 2$ divise $3n - 1$.

Exercice 9

n est un entier relatif différent de -2 .

On pose $a = -2n^2 - 4n + 6$ et $b = n + 2$.

1. Vérifier que $-2n^2 - 4n + 6 = -2n(n + 2) + 6$.

2. Pour quelles valeurs de n , b divise-t-il a ?

Exercice 10

n est un entier relatif différent de 4. Pour quelles valeurs de n le nombre rationnel $\frac{35}{n - 4}$ est-il entier ?

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n^2 + 2$.

Exercice 12

1. Trouvez tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $(x + 2)(y - 3) = 15$.

2. Trouvez tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que :

(a) $x^2 - y^2 = 20$;

(b) $4x^2 - 49y^2 = 15$.

Exercice 13

1. k est un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $a = 4k + 1$ et $b = 3k - 8$.

Quels sont les diviseurs positifs communs à a et à b ?

2. n est un entier naturel. On pose $a = 3n^2 + 15n + 18$ et $b = n + 1$.

(a) Trouvez deux entiers α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a = (n + 1)(3n + \alpha) + \beta$.

(b) Quelles sont les valeurs de l'entier n pour lesquelles b divise a ?

Exercice 14

k est un entier naturel. On pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$.

Démontrer que les seuls diviseurs positifs possibles communs aux entiers a et b sont 1 et 5.

Exercice 15

n est un entier.

1. Démontrer que, quel que soit l'entier n , $n + 2$ divise $n^2 + 3n + 2$.

2. En déduire les valeurs de l'entier n pour lesquelles $(n + 2)$ divise $4n^2 + 12n + 20$.

Exercice 16

m et n sont deux entiers relatifs. On pose $a = 10n + m$.

1. Démontrer que si $n - 11m$ est divisible par 37, alors a est divisible par 37.
2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

Exercice 17

n est un entier naturel.

Démontrer que si un entier naturel a divise les entiers $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$, alors a divise 11.

Exercice 18

- 1) Déterminer tous les diviseurs positifs de 450. Combien y en a-t-il ?
- 2) Déterminer les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant : $5x^2 - 7xy = 17$
- 3) Montrer que si n est un entier impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.
- 4) Soit n un entier relatif. Pour qu'elles valeurs de n la fraction $\frac{6n + 12}{2n + 1}$ est-elle un entier relatif.

Exercice 19

On considère l'équation $(E) : x^2 - Sx + 56 = 0$, où S est un entier naturel.

1. Montrer que si (E) a une solution entière n alors n divise 56.
2. Montrer que si n est solution de (E) , $S - n$ l'est aussi.
3. Déterminer les valeurs de S pour lesquelles (E) admet deux solutions dans $\mathbb{N}$.
Pour chaque valeur de S , donner les solutions de (E) .

Exercice 20

On se propose de déterminer tous les nombres entiers naturels n vérifiant la propriété P :

" $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ".

1. Utiliser un tableur ou une calculatrice pour déterminer tous les nombres entiers naturels $n < 121$ qui vérifient la propriété P.
- 2(a) Simplifier l'expression $n^2 + 11 - (n + 11)(n - 11)$.
(b) En déduire que tous les nombres entiers n qui vérifient la propriété P sont inférieurs ou égaux à 121.
(c) Conclure.

Exercice 21

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 22

Démontrer que pour tout $a; b \in \mathbb{Z}$, le nombre $N = (a + b)^5 - a^5 - b^5$ divisible par 5.

Exercice 23

La somme de deux entiers naturels est 2096. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste 206. Quels sont ces nombres ?

Exercice 24

Soit a un entier naturel impair, montrer que $a^2 + 4a - 5$ est divisible par 8.

Exercice 25

Montrer que si n premier alors $n + 7$ n'est pas premier.

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$x^2 = 4y^2 + 3$$

Exercice 27

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. En divisant 250 par b le reste est 7. En divisant 500 par b le reste est 5. Que vaut b ?

Exercice 28

- 1) Trouver dans $\mathbb{N}$ tous les 20 diviseurs de 240. On donnera les diviseurs dans l'ordre croissant.
- 2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.
- 3) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.
- 4) (ROC). Démontrer le théorème suivant :

Soit trois entiers relatifs a, b et c . Si a divise b et c alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c , c'est à dire $\alpha b + \beta c$ avec α et β deux entiers relatifs.

Application : Soit n un entier naturel ($n \geq 4$) et deux nombres entiers $a = n + 7$ et $b = 3n - 4$. Montrer que les seuls diviseurs communs possibles à a et b sont : 1, 5 et 25.

Exercice 29

1) Trouver dans $\mathbb{N}$ tous les diviseurs de 810.

2) Trouver tous les couples d'entiers **naturels** $(x; y)$ qui vérifient :

$$x^2 = y^2 + 33$$

3) Trouver les entiers **relatifs** qui vérifient :

$$x^2 + 2x = 35$$

4) Trouver tous les entiers **relatifs** n tels que $n + 3$ divise $n + 10$.

Division euclidienne

Exercice 30

Écrire la division euclidienne de -5000 par 17 .

Exercice 31

La différence entre deux naturels est 538 . Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34 . Quels sont ces deux entiers naturels ?

Exercice 32

Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.

Exercice 33

Trouver un naturel qui, divisé par 23 , donne pour reste 1 et, divisé par 17 , donne le même quotient et pour reste 13 .

Exercice 34

Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7 . Quels sont les restes possibles ? En déduire quelles sont les valeurs de x possibles.

Exercice 35

Si l'on divise un entier a par 18 , le reste est 13 . Quel est le reste de la division de a par 6 ?

Exercice 36

Si l'on divise un entier A par 6 , le reste est 4 . Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Exercice 37

La division euclidienne de a par b donne $a = 625b + 8634$. De quels naturels peut-on augmenter à la fois a et b sans changer de quotient.

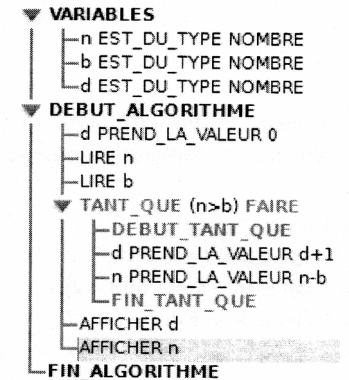
Exercice 38

On considère l'algorithme ci-contre, écrit à l'aide du logiciel Algobox.

1. Simuler cet algorithme en complétant un tableau indiquant les valeurs des variables à chaque étape. On prendra $n = 13$ et $b = 4$.

2. Qu'obtient-on si on prend $n = 203$ et $b = 4$?

3. Que fait cet algorithme ?



Exercice 39

n est un entier naturel.

- Quels sont les entiers naturels pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n+8$?
- Quels sont les entiers naturels pour lesquels le reste de la division euclidienne de $(n+1)^3$ par n^2 est $3n+1$?
- Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $2n^2 + n$ par $n+1$.

Exercice 40

- Montrer l'implication : p impair $\Rightarrow p^2$ impair.
- Montrer l'équivalence : p pair $\iff p^2$ pair.

Exercice 41

- a et b sont deux entiers naturels tels que $a^2 - 2b^2 = 1$.
Prouver que a est impair et que b est pair.
- (a) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 3 ?
(b) En déduire que si p n'est pas divisible par 3 alors $2p^2 + 1$ est divisible par 3 .
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $A = n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3 .
- a est un entier naturel. Démontrer que $a(a^2 - 1)$ est multiple de 2 et de 3 .
- Démontrer que pour tout entier naturel n , $A = 3n^4 + 5n + 1$ est impair. En déduire que A n'est jamais divisible par $n(n+1)$.
- a et b sont des entiers naturels. On suppose que $N = a^2 - b^2$ est un entier naturel impair. Démontrer que a et b n'ont pas la même parité.
- Déterminer les entiers naturels tels que $n^3 + 4n = 240$. On pourra distinguer le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Exercice 42

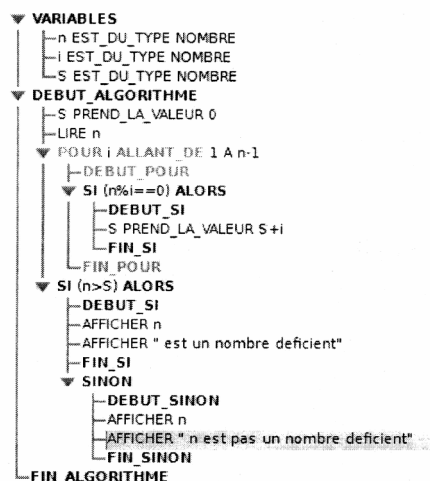
Soit n un entier naturel non nul.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par $n+4$?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de n^2+2 par $n+1$?

Exercice 43

On dit qu'un entier naturel est **déficient** s'il est supérieur à la somme de ses diviseurs positifs stricts. On dit qu'il est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts et **abondant** s'il est inférieur.

1. Voici un algorithme, écrit avec le logiciel Algobox, permettant de savoir si un nombre entier est déficient.



Étudier cet algorithme et à l'aide de celui-ci, écrire un nouvel algorithme permettant d'afficher la liste des nombres déficients compris entre 0 et 100.

2. Combien y a-t-il de nombre déficients entre 0 et 100 ?
Même question pour les nombres parfaits puis abondants.
3. Montrer que les nombres premiers sont déficients.

Exercice 44

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 6 ?
2. En déduire, par disjonction des cas, que tout nombre premier différent de 2 ou 3 peut s'écrire sous la forme $6n+1$ ou $6n-1$.
3. Donner, à l'aide de la calculatrice, tous les nombres premiers compris entre 0 et 100.

Exercice 45

Quel est le reste de la division euclidienne de 2014^{2013} par 7 ?

Exercice 46

- 1) Écrire la division euclidienne de -2016 par 17.
- 2) Soit b un entier naturel non nul. Le quotient dans la division euclidienne de 524 par b est 15. Quels sont les restes possibles ?
- 3) Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.
 - a) Si le reste dans division d'un entier n par 66 est 5 alors le reste de n dans la division par 11 est également 5.
 - b) Si le reste dans division d'un entier n par 11 est 5 alors le reste de n dans la division par 66 est également 5.

Exercice 47

- 1) L'égalité $a = 15q + 51$ correspond-elle à la division euclidienne de a par 15 ? Sinon écrire l'égalité correspondante.
- 2) La différence de deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, la quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces nombres ?
- 3) Dans la division euclidienne entre deux entiers positifs, le dividende est 857 et le quotient 32.
Quels peuvent être le diviseur et le reste.

Exercice 48

- 1) Si on divise un nombre a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?
- 2) Si l'on divise un nombre A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Exercice 49

- 1) Citez le théorème sur les propriétés de compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances.
- 2) Montrer que $11^6 \equiv 1 \pmod{7}$. En déduire le reste dans la division euclidienne de 11^{2011} par 7.
- 3) a) Vérifier que 999 est divisible par 27.
b) Démontrer que $10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}$.
c) Quel est le reste dans la division de $10^{100} + 100^{10}$ par 27 ?
- 4) Soit n un entier naturel, on sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b .
On a alors : $n = 10a + b$
Prouver que n est divisible par 17 si et seulement si $a - 5b$ est divisible par 17.

Application : Montrer par ce procédé (que l'on peut réitérer) que les nombres : 816 et 16 983 sont divisible par 17.

Exercice 50

- 1) Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances. Démontrer la propriété de compatibilité avec l'addition.
- 2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.
b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
- 3) Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 51

On considère l'équation $(F) : 11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

- 1) Démontrer que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F) , alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$.
- 2) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter (sans justification) les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, x^2 est congru à					

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2y^2$ est congru à					

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?

- 3) En déduire que si le couple $(x ; y)$ est solution de (F) , alors x et y sont des multiples de 5.
- 4) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple $(x ; y)$ n'est pas solution de (F) . Que peut-on en déduire pour l'équation (F) ?

Exercice 52

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.

Partie A

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
- 2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

- 1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
b) On rappelle le binôme de Newton à l'ordre 5 :

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n \left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1) \right].$$

- c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n est divisible par 5^{n+1} .

- 2) a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.
 b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

Partie C

On admet que l'on peut montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.
 Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Exercice 53

- Donner suivant les valeurs de l'entier naturel n , les restes de la division euclidienne de 2^n par 5. (On pourra éventuellement donner le résultat par un tableau).
- En déduire alors le reste de la division euclidienne par 5 de 2012^{2015} .

Exercice 54

ROC

- Citer le théorème de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et la puissance.
- Pré-requis :** $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a - b \equiv 0 \pmod{n}$
 Soit a, b, c et d quatre relatifs tels que : $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$.
 Montrer que : $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- Application :**
 Montrer que $4^4 \equiv 3 \pmod{11}$ puis en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^{4n+2} - 3^{n+3} \text{ est divisible par } 11$$

Exercice 55

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance j le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance m , le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, alors $j = 14$ et $m = 5$.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

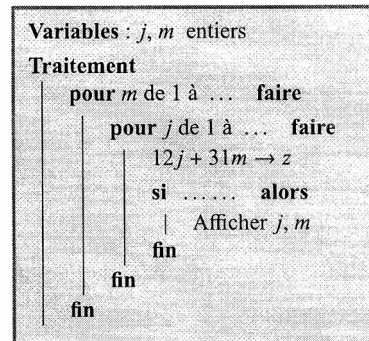
« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ». Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1^{er} août ! ».

- Vérifier que pour une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
- a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
 Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m \pmod{12}$.
 b) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

On considère l'algorithme ci-contre :



- Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que :

$$12j + 31m = 503$$
- Quel est alors la date d'anniversaire correspondante ?

Exercice 56

En rangeant les n pièces de son puzzle, Raja constate que :

- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces ;
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces ;
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce ;
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce.

Sa mère affirme qu'alors $2n - 11$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.

- A-t-elle raison ?
- Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2000 ?

Nombres premiers, théorème de Fermat, Bezout et Gauss

Exercice 57

- 1) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
- 2) Énoncer le critère d'arrêt des nombres premiers.

Application : 401 est-il premier ? Résoudre alors dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$x^2 - y^2 = 401$$

- 3) Quel est le nombre de diviseurs de 13 230.

Exercice 58

- 1) Montrer que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est pair.
- 2) Montrer que $2^{36} - 1$ et $3^{36} - 1$ sont divisibles par 37. On citera le théorème utilisé.
- 3) En déduire alors que $2^{37} + 3^{37} - 5$ est divisible par 74.

Exercice 59

On considère un carré de la forme $17p + 1$ où p est premier.

- 1) Écrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
- 2) En déduire p . On citera le théorème utilisé.

Exercice 60

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n .

- 1) Montrer que l'on a : $\beta(\alpha - 1) = 4$
- 2) En déduire n .

Exercice 61

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- 1) Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
- 2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$, puis que n est divisible par 16.
- 3) En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n .
- 4) a) Soient a , b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c .
b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n .
- 5) Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice 62

L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre 1000 ! (factorielle 1000 et non « mille points d'exclamation »)

On rappelle que : $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 1000$

- 1) Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geq 1$ et $q \geq 1$ et un entier N premier avec 10 tels que :

$$1000! = 2^p \times 5^q \times N$$

- 2) On justifiera clairement les questions suivantes :
 - a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5 ?
 - b) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^2 ?
 - c) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^3 ?
 - d) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1000 divisible par 5^4 ?
 - e) En déduire alors que $q = 249$
- 3) Établir que $p > q$ et que le nombre cherché est q

Exercice 63

On considère un entier n tel que $n^2 = 17p + 1$ où p est premier.

- 1) Écrire $17p$ comme le produit de deux facteurs.
- 2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
- 3) En déduire n puis p .

Exercice 64

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n

- 1) Montrer que l'on a : $\beta(\alpha - 1) = 4$
- 2) En déduire les trois valeurs possibles pour n .

Exercice 65

Pour la proposition suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition : « Pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

Exercice 66

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

Exercice 67

- 1) Démontrer l'égalité dite de « Sophie Germain » :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

- 2) n est un entier naturel, pour quelles valeurs de n , $n^4 + 4$ est-il premier ?
- 3) Démontrez que $4^{545} + 545^4$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 68

On considère l'algorithme suivant où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

- 1) Quels résultats affiche cet algorithme pour $A = 12$?
- 2) Que donne cet algorithme dans le cas général ?

```
Variables : A et N entiers naturels
Entrées et initialisation
  Saisir A
  N prend la valeur 1
Traitement
  tant que N ≤ √A faire
    si A/N = Ent(A/N) alors
      Afficher N et A/N
    fin
  N prend la valeur N + 1
fin
```

Exercice 69

On considère un entier n tel que $n^2 = 29p + 1$ où p est premier.

- 1) Ecrire $29p$ comme le produit de deux facteurs en fonction de n .
- 2) Citer le théorème de Gauss appliqué aux nombres premiers
- 3) En déduire n puis p .

Exercice 70

p est un nombre premier supérieur ou égal à 7. Le but de cet exercice est de montrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240 puis d'appliquer ce résultat.

- 1) Peut-on avoir $p \equiv 0 \pmod{3}$? En analysant les autres cas modulo 3, démontrer que n est divisible par 3.
- 2) En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$p^2 - 1 = 4k(k + 1)$$

En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 8 puis que n est divisible par 16.

- 3) En raisonnant comme à la question 1) modulo 5, démontrer que 5 divise n .

4) a) Que peut-on dire si a et b divisent c et que $\text{pgcd}(a, b) = 1$?

b) Dédurre des questions précédentes que 240 divise n .

5) Existe-t-il 15 nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs à 7, tels que l'entier A ci-dessous soit un nombre premier ?

$$A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$$

Equations diophantiennes

Exercice 71

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation (E)
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation (E).

Exercice 72

Soit à résoudre l'équation $51x + 54y = 2004$.

1. Démontrer que cette équation diophantienne possède des solutions.
2. Démontrer que cette équation peut s'écrire $17x + 18y = 668$.
3. On va résoudre l'équation $17x + 18y = 1$.
 - a) Déterminer une solution particulière de cette équation (une solution est ici un couple d'entiers!).
 - b) En suivant la méthode décrite plus haut et notamment en utilisant le théorème de Gauss, démontrer que les couples solutions de cette équation sont de la forme $(-1 + 18k ; 1 - 17k)$ $k \in \mathbb{Z}$.
 - c) En déduire enfin toutes les solutions de l'équation $17x + 18y = 668$.

Exercice 73

Résoudre les équations diophantiennes suivantes :

$$17x - 33y = 5$$

$$91x + 10y = 412$$

$$14x - 6y = 21$$

Sujets baccalauréat

Exercice 1 – Baccalauréat Amérique du Sud - Novembre 2016

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, ... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11\dots 1}_{p \text{ répétitions du chiffre 1}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

- Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
- Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
 - Prouver que, pour tout entier naturel j , $10^j \equiv 1 \pmod{3}$.
 - En déduire que $N_p \equiv p \pmod{3}$.
 - Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
- Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.

- Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod{7}$.

On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

- Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si p est un multiple de 6.
On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.
- Justifier que, pour tout entier naturel p non nul, $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$.
- Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9N_p$ ».
- En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

- Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \dots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \dots \pmod{10}$										

- En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que : $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

- Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

- Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

- En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 2 – Baccalauréat Métropole - Juin 2016

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b) , on note $\text{pgcd}(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b .

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Exemple. Soit Δ_1 la droite d'équation $y = \frac{5}{4}x - \frac{2}{3}$.

- Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15x - 12y$ est divisible par 3.
- Existe-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation $(E) : y = \frac{m}{n}x - \frac{p}{q}$ où m, n, p et q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m, n) = \text{pgcd}(p, q) = 1$.

Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m, n, p et q pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.
- En remarquant que le nombre $ny_0 - mx_0$ est un entier relatif, démontrer que q divise le produit np .
 - En déduire que q divise n .
3. Réciproquement, on suppose que q divise n , et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.
- On pose $n = qr$, où r est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $qru - mv = 1$.
 - En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \frac{m}{n}x_0 - \frac{p}{q}$.
4. Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$. Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs? Justifier.
5. On donne l'algorithme suivant :

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	Si Q divise N alors X prend la valeur 0 Tant que $\left(\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier et $\left(-\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier faire X prend la valeur $X + 1$ Fin tant que Si $\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ est entier alors Afficher $X, \frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Sinon Afficher $-X, -\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Fin Si Sinon Afficher « Pas de solution » Fin Si

- Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de M, N, P, Q , entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$.
- Que permet-il d'obtenir?

Exercice 3 – Baccalauréat Liban - Juin 2017

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} c$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.

Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.

c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.

L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
 P prend la valeur 0
 R prend la valeur 0

Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
 R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
 I prend la valeur $I + R$
 Fin Pour
 Pour k allant de 1 à 7 :
 | P prend la valeur $P + a_{2k}$
 Fin Pour
 S prend la valeur $I + P + c$

Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
 Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
 Sinon :
 Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
 Fin Si

- On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
 - Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I .
 - Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
 - On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
 Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu 6a35 4002 9561 3411 reste correct?
- On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
 Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
- Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.

On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.

Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								